

Université de Montréal

**Stabilité des chocs non classiques pour des lois
de conservation non convexes.**

par

Eva Kardhashi

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en mathématiques appliquées

31 août 2017

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Stabilité des chocs non classiques pour des lois
de conservation non convexes.**

présentée par

Eva Kardhashi

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Bélair, Jacques

(président-rapporteur)

Laforest, Marc

(directeur de recherche)

Lorin de la Grand Maison, Emmanuel

(membre du jury)

Mohammadian, Majid

(examineur externe)

McKenzie, Pierre

(représentant du doyen de la FAS)

Thèse acceptée le

26 avril 2017

Je dédie ce travail à
mon père
qui n'a jamais cessé de me soutenir, m'assister et m'encourager durant ce long
cycle d'études et à
ma mère
que nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je lui dois, pour sa bien vaillance
dès mon jeune âge, son affection et son soutien.

REMERCIEMENTS

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien de ces personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de « l'apprenti-chercheur ». En outre, je crois sincèrement avoir eu une chance extraordinaire.

Je tiens tout particulièrement remercier mon directeur de thèse, monsieur Marc Laforest, pour toutes ces années qu'il m'a accordées en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect, sa patience dans tous ces délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute, de compréhension et d'encouragement tout au long de ce travail doctoral.

Ensuite, je veux envoyer mes prières à mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude. J'espère te revoir bientôt papa !

Je remercie mon fils Issak, pour chaque câlin qu'il me donne dès qu'il se réveille, chaque matin, sans lesquels je ne trouverais pas la force de me lever et rester debout. Cette poésie je l'ai écrite pour toi mon amour.

What is that feeling of sadness ?
 Hanging in my throat,
 Separating my body in parts,
 Guiding my mind through dark,
 Blinding my eyes from hope.
 Chase the tear with my lazy hand,
 Is the last thought.

Then you came, my hope.
 Keeping me warm and saying those words,
 With your little hands around my face,
 Watching straight to my smile,
 My fake smile.
 And then your kiss,
 As the wind in the summer,
 Whispering lightly as the fresh water,
 In the corner of my lip,
 Bringing the smile back to my face,
 Dressed with long eyelashes,
 Taking the life from your words,
 Bringing the spring to my thoughts,
 Black pearl orchid.
 My sadness became sad,
 No more thread to hang,
 Bothered from the light,
 Hiding somewhere in my body parts,
 Swearing to come back,
 but I'm not scared,
 you're with me, my hope.

Je souhaiterais exprimer mon respect et ma gratitude à monsieur Philippe G. LeFloch. Son soutien a aidé à la poursuite de ce travail, les discussions avec lui ont été stimulantes.

Je remercie également la TGDE de département de mathématiques et statistique de l'université de Montréal, Anne Marie Dupuis pour son accueil chaleureux à chaque fois que j'ai sollicité son aide, ainsi que pour ses multiples encouragements, notamment lors de mes humeurs dépressives au cours des années de thèse.

Mes remerciements vont également à chaque membre de jury de cette thèse.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'en adressais pas à l'ensemble des membres de DMS et de l'École polytechnique de Montréal pour leur soutien logistique ainsi que pour la très bonne ambiance que j'ai toujours trouvée.

Je remercie enfin toutes les personnes intéressées par ce travail, en espérant qu'elles puissent trouver dans mon rapport des explications utiles pour leurs propres travaux.

SOMMAIRE

En premier lieu, nous étudions l'existence et les propriétés des ondes de choc réalisées comme limite d'une régularisation linéaire de type diffusion-dispersion pour la classe des lois de conservation hyperbolique avec un flux générique non convexe ayant un nombre arbitraire de points d'inflexion. Nous introduisons la construction d'une famille de fonctions cinétiques, basée sur la généralisation de la règle de surface égale de Maxwell. Notre résultat principal est une caractérisation (par une fonction cinétique) de tous les chocs admissibles : pour chaque état de gauche et chaque vitesse de choc, nous montrons qu'il existe un choc non classique avec des oscillations arbitraires. De plus, nous énonçons les conditions dans lesquelles une discontinuité est admissible et nous décrivons la famille de toutes les solutions au problème de Riemann. Ce travail constitue une extension des travaux effectués par Bedjaoui, Chalons, Coquel et LeFloch concernant les gaz isentropiques avec une loi d'état de Van der Waals couvrant le cas de deux points d'inflexion.

Ensuite, nous nous intéressons à l'existence d'une classe de solutions non classiques au problème de valeur initiale pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation non linéaires dans une variable spatiale. Les solutions considérées présentent un modèle de "splitting/merging" constitué d'ondes classiques et non classiques qui interagissent ensemble. Notre analyse s'appuie sur un nouveau solveur de Riemann non classique qui est motivé par une fonction cinétique et par un critère de nucléation qui choisit entre le régime classique et non classique. Toutes les solutions satisfont une seule inégalité d'entropie associée à une paire entropie-flux d'entropie donnée. La preuve d'existence de la stabilité non linéaire s'appuie sur l'introduction de nouvelles fonctionnelles qui mesurent de façon appropriée la variation totale et le potentiel d'interaction des ondes non classiques et classiques. Ce travail est une généralisation des travaux effectués par Laforest-LeFloch qui ont déjà établi l'existence de solutions d'entropie non classiques pour les équations scalaires.

Mots-clés : loi de conservation hyperbolique, flux non convexe, régularisation diffusion-dispersion, choc non classique, fonction cinétique, nucléation.

SUMMARY

First, we study the existence and the properties of shock waves realized as the limit of a linear diffusive-dispersive regularization for the class of hyperbolic conservation laws with generic non-convex flux having an arbitrary number of inflection points. We introduce the construction of a corresponding family of kinetic functions, based on a generalization of Maxwell's equal area rule. Our main result is a characterization (via a kinetic function) of all admissible shocks : for each left-hand state and each shock speed, we prove that there exists a nonclassical shock with arbitrary many oscillations. Moreover, we state conditions under which a discontinuity is entropy dissipative and we describe the family of all entropy dissipative solutions to the Riemann problem. This work is an extension of the work done by Bedjaoui, Chalons, Coquel and LeFloch on the Van der Waals isentropic gases covering the case of two inflection points.

Next, we are interested in the existence of a class of nonclassical entropy solutions to the initial value problem for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws in one space variable. The solutions under consideration exhibit a splitting/merging pattern made of classical and nonclassical waves that interact together. Our analysis is based on a new non-classical Riemann solver which is motivated by a kinetic relation for the propagation of nonclassical shocks and by a nucleation criterion that selects between classical and nonclassical behavior. All solutions satisfy a single entropy inequality associated with a given entropy pair. Our existence proof of nonlinear stability builds on the introduction of a new total variation functional which suitably measure the total variation and wave interaction of nonclassical and classical waves. This work is a generalization of the work done by Laforest-LeFloch who have already established the existence of nonclassical entropy solutions for scalar equations.

Keywords : hyperbolic conservation law, nonconvex flux, diffusive-dispersive regularization, nonclassical shock, kinetic function, nucleation.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	v
Sommaire	vii
Summary	ix
Liste des figures	xv
Introduction	1
Chapitre 1. Survol de la théorie mathématique des lois de conservation	
9	
1.1. Lois de conservation	9
1.2. Théorie scalaire	15
1.2.1. Solutions classiques	15
1.2.2. Solutions faibles	19
1.2.3. Condition de Rankine-Hugoniot	20
1.2.4. Solutions faibles admissibles	21
1.2.5. Existence et unicité de solutions faibles	24
1.3. Théorie pour les systèmes	25
1.3.1. Résumé de la de littérature	26
1.3.2. La méthode des caractéristiques	28
1.3.3. Solution faible	29
1.3.4. Condition de Rankine-Hugoniot	29
1.4. Existence globale des solutions faibles entropiques	39
1.4.1. Schéma de Glimm	39
1.4.2. La méthode de suivi de fronts	42
1.4.3. Borne uniforme sur la variation totale	43
1.4.4. Unicité	44
1.5. Les équations hyperboliques comme modèles dégénérés	46

1.6. Les lois de conservation non convexes	49
1.6.1. Problématique générale	49
1.6.2. Une inégalité d'entropie ?	50
1.6.3. Relations cinétiques pour les chocs sous-compressifs	51
1.6.4. Exemples de modèles de diffusion-dispersion	52
1.6.5. Solveur de Riemann classique	56
1.6.6. Solveur de Riemann non classique	59
1.6.7. Solveur de Riemann avec nucléation	62
1.6.8. Relations cinétiques associées aux "traveling waves"	64
1.6.9. Quelques remarques	74

Chapitre 2. Diffusive-dispersive traveling waves and kinetic relations. Generic flux with m

77

2.1. Introduction	77
2.2. Generic flux and entropy dissipation	79
2.2.1. Background material	79
2.2.2. The class of flux-functions of interest	80
2.2.3. Properties of the entropy dissipation	81
2.3. Diffusive-dispersive traveling waves	84
2.3.1. The traveling wave problem	84
2.3.2. Traveling waves associated with a given speed	87
2.4. Nonclassical traveling wave solutions and dependence in α	91
2.4.1. A generalization of Maxwell's equal area rule	91
2.4.2. Properties of the diffusive-dispersive trajectories	93
2.5. Nonclassical traveling wave solutions and global analysis of φ_0^b	97
2.6. Numerical experiments	99
2.7. Concluding remarks	102

Chapitre 3. Splitting-merging patterns for phase transitions with kinetics and nucleation

103

3.1. Introduction	103
Objective of this paper	103
Notation and assumptions	104

Outline of this paper	106
3.2. Nonclassical Riemann solver with kinetics and nucleation	107
3.2.1. Background and notation	107
3.2.2. Construction based on Lax shock inequalities	108
3.2.3. Nonclassical wave sets based on a single entropy inequality ..	110
3.2.4. Kinetic relation and nucleation criterion	113
3.3. Splitting-merging patterns with kinetics and nucleation	116
3.3.1. Objectives and notation	116
3.3.2. Generalized wave strength and interaction patterns	119
3.3.3. Interaction estimates	122
3.3.4. Interaction potential	138
3.3.5. Global estimates	150
3.4. Splitting-merging solutions with nucleation	158
3.4.1. Nucleation and the splitting-merging cycle	158
3.4.2. Total variation estimate for the splitting-merging cycle	164
3.5. Conclusion	167
Chapitre 4. Conclusions	169
Bibliographie	171

LISTE DES FIGURES

1.1	Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite)	16
1.2	Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite)	17
1.3	Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite)	19
1.4	Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite)	22
1.5	L'équation de Rankine-Hugoniot dans le cas scalaire.	30
1.6	Représentation du problème de Riemann pour les équations d'Euler dans le plan (x, t) .	38
1.7	Structure des caractéristiques et solution au temps t_1 à travers une onde de détente (à gauche)	40
1.8	Schéma de Glimm.	41
1.9	Une solution approchée construite par le suivi de fronts.	43
1.10	Les estimées de Glimm. $\gamma_i = \alpha'_i + \beta'_i$, $i = 1, \dots, n$	44
1.11	Fonction dissipation d'entropie pour un flux concave-convexe	59
1.12	Solution de Riemann, le solveur non classique.	62
1.13	Solution de Riemann, le solveur de nucléation.	64
1.14	Fonction cinétique pour le flux cubique. Pour chaque valeur de α on observe que ϕ_α^b est	68
1.15	Courbe classique pour la 2 ^{ème} -famille d'onde.	70
1.16	Flux de Buckley-Leverett, $a = 1$, $u \in [0, 1]$	72
1.17	Solutions de "Splitting/Merging" pour le flux concave-convexe	74
2.1	Graph of the flux-function f and the entropy E as a function of the right-hand state.	83

2.2	The four neighboring quadrants of a saddle equilibrium $(u_i, 0)$	91
2.3	Graph of the entropy E as a function of the right-hand state.	92
2.4	Kinetic function for the generic flux.	99
2.5	Flux function with 5 inflection points. The line, with the slope $a = 7$, passing through the point $(7, 100)$	
2.6	Monotone and 1-oscillating trajectories from u_0 to saddle points u_2 and u_4 . Trajectories from u_0 to 101	
2.7	Trajectories towards u_4 and u_5 . Note that the monotone trajectory and the 1-oscillating trajectory 101	
3.1	Classical wave curves	111
3.2	Classification of a j -shock wave connecting a left-hand state u_- to a right-hand state u_+ 112	
3.3	Entropy dissipation along the Hugoniot curve.	113
3.4	Front-tracking approximations.	118
3.5	Initial data $u(x, 0) = u_0(x)$	119
3.6	Functionals associated to specific families of waves.	123
3.7	Case 1. $\alpha_i C_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N' C^{\uparrow'}$ or $C_{\pm}^{\downarrow} \alpha_i \rightarrow N' C^{\uparrow'}$	131
3.8	Case 2. $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow} \rightarrow C_{\pm}^{\downarrow}$	132
3.9	Case 3. $\alpha_i C \rightarrow C'$ or $C \alpha_i \rightarrow C'$, case 4. $\alpha_i N_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} \alpha'_i$	132
3.10	Case 5. $\beta_j C_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$ or $C_{\pm}^{\downarrow} \beta_j \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$	135
3.11	Case 6. $\beta_j N_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} \beta'_j$ or $N_{\pm}^{\downarrow} \beta_j \rightarrow \beta'_j N_{\pm}^{\downarrow'}$	136
3.12	Case 7. $\beta_j C \rightarrow C' \beta'_j$ or $C \beta_j \rightarrow \beta'_j C'$	137
3.13	The following is an illustration of the trajectories of the waves involved in a single splitting-merging 161	

INTRODUCTION

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre une fonction u et ses dérivées. On rencontre de telles équations dès qu'on s'intéresse à des questions de modélisation : en physique, en électromagnétisme, en mécanique du solide et des fluides bien sûr, mais aussi en biologie, en chimie, en économie, et même en finance. Quand on s'intéresse à une application donnée, on est très vite amené à faire la distinction entre les EDPs stationnaires, (où toutes les variables jouent un rôle équivalent) qui sont les EDP elliptiques et les EDPs d'évolution (où une des variables joue un rôle privilégié : le temps) qui sont les EDP hyperboliques et paraboliques. L'étude des EDP hyperboliques fera l'objet de cette thèse. Elles modélisent essentiellement des phénomènes de propagation en l'absence de phénomènes de dissipation énergétique.

L'exemple le plus important des équations hyperboliques est l'équation d'onde, $u_{tt} = \Delta u$. Une certaine forme de cette équation, ou une généralisation de celle-ci, presque inévitablement se pose dans toute analyse mathématique des phénomènes impliquant la propagation des ondes dans un milieu continu. Premièrement, il est possible de mettre cette EDP du second ordre sous la forme d'un système de deux EDP du premier ordre. Plus généralement, on traite un système d'EDP de la forme suivante :

$$A(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = C(x, t),$$

où u et C sont des vecteurs de dimension n , A et B des matrices de dimension $n \times n$ qui peuvent dépendre de x et de t . Par définition, un système hyperbolique est un système d'EDP possédant des caractéristiques permettant de réduire l'EDP en un système infini d'EDO d'ordre 1. Le principe est de ramener, par un changement de coordonnées, l'EDP ou le système d'EDP du premier ordre à un ensemble d'équations différentielles ordinaires (EDO) du premier ordre. Les nouvelles lignes de coordonnées sont des courbes dans le plan physique, appelées des caractéristiques. Cette transformation permet une interprétation géométrique des solutions dans le plan (x, t) et conduit souvent à des résolutions analytiques ou numériques. Très souvent, les équations hyperboliques sont l'expression de lois

de conservation convexe, le bilan d'énergie, de masse, de quantité de mouvement, de matière. On suppose que les mécanismes à petite échelle peuvent être négligés (induits par la viscosité, la capillarité, conduction thermique, effet de Hall ...).

L'étude des systèmes hyperboliques de lois de conservation est un sujet historiquement important dont les premiers pas remontent à D'Alembert avec l'équation des ondes. D'autres chercheurs comme Euler, Riemann, et Stokes ont participé à l'analyse des équations de la mécanique des fluides. En fait, l'histoire des équations d'Euler remonte à Leonhard Euler qui les a établies pour les écoulements incompressibles vers 1757. La relation avec la thermodynamique est due à Pierre-Simon de Laplace et Navier en 1816. Dans un papier très influent, Riemann a étudié les conditions initiales discontinues et avec un recul historique il est possible d'apprécier l'importance de ce problème. Durant les années 50, Oleinik [60]-[61] débute l'étude abstraite des lois de conservation avec le cas scalaire ainsi que deux lois de conservation couplées. Puis, Lax [43] fournit un travail fondamental sur la théorie mathématique des ondes de choc, inspiré par les travaux sur les écoulements supersoniques de la deuxième guerre mondiale [21], et des solutions du problème de Riemann. Par la suite, la théorie d'existence pour les systèmes remonte au travail de Glimm [30]. Il présente la première preuve générale d'existence de solutions pour les systèmes de lois de conservation. Son travail est suivi par d'importantes contributions de DiPerna, Liu, Yang, Bressan et d'autres. Ces chercheurs ont amélioré les techniques introduites par Glimm. Ils ont présenté des preuves d'existence, d'unicité et de stabilité de solutions pour ces mêmes lois, tout en maintenant les conditions initiales à petite variation totale employées par Glimm dans ses travaux initiaux. Après le développement d'une théorie complète pour les systèmes convexes, la question des systèmes non convexes est apparue de plus en plus importante pour plusieurs chercheurs car ces systèmes concernent, entre autres, les équations des fluides multiphase et les équations de la magnétohydrodynamique, des sujets importants en génie pétrolier, en astrophysique et en génie nucléaire. Nous proposons de rappeler brièvement les principales motivations de ces études, afin d'introduire le plus naturellement possible les travaux effectués dans cette thèse.

Le but principal de résoudre les équations des lois de conservation est d'essayer d'apprendre quelques informations sur le processus physique que ces équations sont supposées modéliser. Rares sont les situations concrètes pour lesquelles on sait calculer une solution analytique. En réalité, on est amené à se tourner vers l'utilisation de méthodes numériques pour calculer une solution approchée.

Les systèmes hyperboliques, non linéaires, des lois de conservation ont la forme générale

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u = u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{U}, \quad (0.0.1)$$

où le flux donné $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est défini sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ et satisfait à la condition d'hyperbolicité stricte (valeurs propres réelles et distinctes).

Les difficultés majeures découlent du manque de régularité des solutions. En raison de la non linéarité des équations et de l'absence de termes de diffusion avec effet de lissage, les solutions initialement régulières peuvent devenir discontinues en temps fini. Les solutions globales dans le temps ne peuvent donc être construites que dans un espace de fonctions discontinues, en interprétant l'équation (0.0.1) au sens des distributions. Lorsque des discontinuités sont présentes, la solution faible d'un problème de Cauchy peut ne pas être unique. Pour isoler une solution unique admissible, les conditions de Rankine-Hugoniot et les conditions d'entropie sont habituellement imposées le long des chocs. Ces conditions ont souvent une motivation physique, caractérisant les solutions qui peuvent être récupérées à partir de modèles d'ordre supérieur, laissant les coefficients de diffusion ou de dispersion approcher zéro. En tant que tel, il serait naturel d'étudier les lois de conservation avec la prise en compte de phénomènes régularisant d'ordre supérieur à deux. Ainsi, les solutions faibles d'intérêt sont celles qui découlent de l'étude des solutions limites d'une régularisation prenant par exemple la forme

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \partial_x \mathcal{R}^\varepsilon(\varepsilon \partial_x u^\varepsilon, \varepsilon^2 \partial_{xx} u^\varepsilon, \dots), \quad (0.0.2)$$

dans laquelle l'opérateur \mathcal{R}^ε prétend restituer la physique pertinente "oubliée" dans la limite du premier ordre (0.0.1). Numériquement il est plus précis et moins coûteux de résoudre des équations de premier ordre, et physiquement, les phénomènes régularisants ont lieu sur des échelles de temps si courtes que la diffusion n'a pas encore eu effet, d'où la raison de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, numériquement les variations $\partial_{xx} u$, $\partial_{xxx} u$ nécessiteraient un maillage si fin qu'il serait impossible de calculer une solution approchée. Dans le cas des lois de conservation convexes, les limites obtenues ne dépendent pas des régularisations d'ordre supérieurs, c'est-à-dire de la présence de dispersion ou de termes de la forme $\partial^k u / \partial x^k$, $k \geq 3$. Toutefois, pour les lois de conservation non convexes, les limites dépendent de l'équilibre entre tous les termes de la régularisation. L'objectif est donc de récupérer les solutions discontinues obtenues comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon$ à l'aide d'une méthode numérique pour la loi de conservation d'ordre 1.

Dans le but d'avoir des solutions plus générales de (0.0.1), le bloc de construction de base est le problème de Riemann, c'est-à-dire le problème à valeur initiale où les données sont constantes par morceaux, avec un seul saut à l'origine. Pour

une grande variété de systèmes hyperboliques, en supposant que l'amplitude du saut initial est petit, la solution a été construite par Lax [43] sous certaines hypothèses additionnelles sur les champs caractéristiques. La méthode de Glimm et/ou l'algorithme de suivi de front sont les techniques les plus souvent utilisées pour la construction de ces solutions. Les deux algorithmes produisent une suite de solutions approchées dont la convergence est démontrée par le théorème de compacité de Helley. En supposant que la variation totale des données initiales est suffisamment petite, on obtient ainsi l'existence globale d'une solution d'entropie faible au problème de Cauchy. La dépendance continue par rapport aux données initiales des solutions faibles obtenues comme les limites des solutions approchées fut plus tard établie par A. Bressan, T.P. Liu, and T. Yang [19].

Une caractéristique des lois de conservation non convexes correspondant à des régularisations de la forme (0.0.2), est l'apparition d'ondes de choc dites non classiques, des discontinuités qui ne satisfont pas les inégalités d'entropie de Lax (scalaire) ou de Liu (système). D'une part, la physique des systèmes nécessite la présence de termes d'ordres supérieurs réintroduite à l'aide de régularisations de la forme (0.0.2), d'autre part il est bien connu que pour les lois de conservation non convexes (0.0.1), une seule paire entropie-flux d'entropie (U, F) ne détermine pas uniquement la solution du système. Alors, comment caractériser la limite u quand $\varepsilon \rightarrow 0$? En particulier, quelles discontinuités devrait-on considérer comme des solutions admissibles?

Dans [46], LeFloch nous montre qu'effectivement il est possible d'identifier une classe de solutions admissibles en sélectionnant une régularisation. La stratégie de base consiste à imposer une seule inégalité d'entropie au sens des distributions, $\partial_t U(u) + \partial_x F(u) \leq 0$, ainsi qu'une condition algébrique supplémentaire imposée à certaines ondes de choc non classiques. LeFloch introduit alors la notion de la fonction cinétique $\varphi^\flat : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est Lipchitz continue, monotone décroissante et pour laquelle chaque onde de choc non classique (u_-, u_+) dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, mais pour un taux de diffusion-dispersion constant, satisfait

$$u_+ = \varphi^\flat(u_-).$$

L'avantage de la fonction cinétique est le fait de permettre une analyse et une construction des solutions d'une loi de conservation non convexe sans recourir à la régularisation. Ainsi, en considérant des données initiales constituées de deux états constants séparés par une seule discontinuité, on construit un solveur Riemann non classique associé à une fonction cinétique prescrite, compatible avec une inégalité d'entropie.

Pour les lois de conservation scalaires et plus généralement les systèmes hyperboliques non linéaires, LeFloch et ses co-auteurs ont initié le développement d'une théorie des solutions d'entropie non classiques, basée sur l'imposition d'une fonction cinétique afin de caractériser de façon unique la dynamique des chocs non classiques sous-compressifs ; LeFloch a utilisé le schéma de Glimm et a d'abord étudié mathématiquement la fonction cinétique découlant de la dynamique des transitions de phase dans les liquides ou les solides, pour lesquels nous renvoyons le lecteur à Slemrod [72], Truskinovsky [76] et Abeyaratne et Knowles [3]. Le sujet a beaucoup développé depuis lors, des résultats d'unicité et de stabilité ont été obtenus. Nous nous référons à la monographie de LeFloch [46] pour une revue de cette théorie. Toutefois, il n'existe aucun résultat d'existence pour des solutions aux systèmes hyperboliques non convexes, malgré l'annonce prématurée dans le monographe de LeFloch [46].

L'existence ainsi que les propriétés qualitatives de la fonction cinétique sont associées à l'étude de l'existence et des propriétés des solutions "traveling waves". L'existence des "traveling waves" a été traitée dans [39] pour le flux cubique et dans [7] pour des fonctions de flux générales avec un point d'inflexion et des régularisations linéaires. Bedjaoui and LeFloch, dans [8], ont généralisé l'analyse pour des régularisations singulières, comme le p -Laplacien. À ces régularisations, une fonction cinétique caractérisant la famille de toutes les ondes itinérantes a été introduite et ses propriétés asymptotiques ont été étudiées.

Le concept de fonction cinétique semble bien adapté pour traduire en langage simple les effets d'un opérateur de régularisation donné, et assurer l'unicité d'une solution faible entropique du système hyperbolique. Toutefois, les fonctions cinétiques sont plus générales que les régularisations, mais les fonctions cinétiques obtenues par régularisation permettent d'identifier les propriétés minimales de cette classe de fonction, dont la plus importante est qu'elle est monotone décroissante et que $\varphi^\flat \circ \varphi^\flat$ est une contraction. Pour des modèles hyperboliques plus généraux, une analyse minutieuse de l'existence de solutions "traveling wave" classiques et/ou non classiques conduit à de nombreuses questions intéressantes, certaines encore ouvertes. Comment construire un schéma numérique conservatif qui approxime les solutions satisfaisant la fonction cinétique ? Peut-on identifier des régimes où les équations de la MHD exhibe des solutions non classiques ? Qu'en est-il en dimension spatiale plus grande ou égale à deux ?

Nous traitons deux problèmes dans cette thèse. D'une part, on porte attention à l'existence des ondes "traveling wave" classiques et non classiques réalisées comme limite d'une régularisation linéaire de type diffusion-dispersion pour les lois scalaires de conservation avec fonction de flux non convexe *ayant un nombre*

arbitraire de points d'inflexion. Nous espérons étudier les propriétés des ondes classiques et non classiques dans le but d'introduire la construction d'une famille correspondante de fonctions cinétiques. Dans la littérature existante, N. Bedjaoui, C. Chalons, F. Coquel, et P.G. LeFloch, [59] analysent les "traveling wave" non classiques pour des fonctions de flux avec deux points d'inflexion, dans l'exemple du système de dynamique de gaz isentropique pour un fluide de van der Waals et des régularisations de diffusion-dispersion non linéaires. LeFloch et Thanh [49] ont aussi réalisé des travaux sur le modèle de van der Waals et Thanh a aussi étudié l'existence de ces solutions à l'aide des fonctions de Lyapunov. Toutefois, ces documents ne relient pas les limites régularisées à la construction de fonctions cinétiques. Notre objectif est de construire un solveur de Riemann non classique pour le problème associé à la régularisation linéaire de type diffusion-dispersion, et de fournir une généralisation d'un théorème par Bedjaoui-LeFloch dans [8], couvrant le cas du flux avec un seul point d'inflexion.

Deuxièmement, cette thèse démontre l'existence d'une classe importante de solutions, en adaptant les outils standards d'un solveur de Riemann et la méthode de front-tracking [11, 24, 27, 68]. Plusieurs difficultés doivent être surmontées pour démontrer la convergence des approximations u_h de type front-tracking. Tout d'abord, il faut montrer que le nombre total d'ondes reste fini en temps fixe. Dans le cas scalaire et pour les fonctions de flux concave-convexe, ceci est en fait une question bien comprise puisque chaque solution non classique de Riemann contient au plus deux ondes sortantes. La difficulté réside dans le fait qu'il faut dériver une borne uniforme (indépendante du paramètre h qui contrôle la convergence) sur la variation totale $TV(u_h(\cdot, t))$. Cependant, en raison de l'absence de monotonie du solveur non classique de Riemann, la variation totale (standard) peut augmenter lors des interactions. Pour les systèmes, d'autres difficultés surgissent du fait du manque de régularité des courbes d'onde, et il faut donc contrôler les interactions non linéaires entre des ondes de familles différentes. Le modèle intermédiaire est celui de "splitting/merging". Ces phénomènes illustrent bien la complexité des écoulements de fluides impliquant des transitions de phase : un choc initialement classique peut être divisé en un choc non classique et un autre choc classique ; les deux ondes peuvent également se réunir plus tard.

En généralisant les travaux antérieurs de Baiti, LeFloch et Piccoli [65], Lafortest et LeFloch réinterprètent leur construction de la force (généralisée) des chocs classiques et non classiques, permettant de la simplifier et de la lier directement à la contractivité de φ^b [42]. Ils réussissent ainsi à identifier une fonctionnelle de variation totale plus naturelle. Sa construction s'appuie explicitement sur la

propriété de contractivité de la fonction cinétique. À l'aide de cette nouvelle définition, les auteurs ont proposé une fonctionnelle de Glimm pour les solutions non classiques lorsque la fonction de flux f est de type concave-convexe. Ils établissent que la variation totale des approximations de front-tracking est non-croissante dans le temps et peuvent ainsi conclure l'existence de solutions non classiques au problème à valeur initiale. Inspiré par les travaux de LeFloch and Shearer [48], ils démontrent que la condition de nucléation implique que les solutions "splitting/merging" ne peuvent subir qu'un nombre fini de cycles "splitting-merging".

Cette thèse est organisée comme suit. Dans un premier chapitre, il nous a semblé approprié de donner quelques rappels au sujet de la théorie des lois de conservation. Le deuxième et le troisième chapitre offrent de façon détaillée le contenu principal de cette thèse. Ces chapitres sont écrits sous forme d'articles. Une conclusion récapitule brièvement les travaux effectués ainsi qu'une courte liste de quelques problèmes encore ouverts.

Chapitre 1

SURVOL DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DES LOIS DE CONSERVATION

Ce chapitre fournit un survol de la littérature étudiée durant la réalisation de cette thèse, permettant d'exposer la théorie mathématique des lois de conservation. Ce chapitre n'est, bien entendu, pas destiné aux spécialistes. Il pourrait se révéler utile aux lecteurs un peu plus éloignés de ce thème. Toutefois, il permettra dans la suite, de ne pas réintroduire le vocabulaire principal. Il ne contient aucun nouveau matériel et la plupart du matériel est tirée des livres [14]-[26]-[46] et des articles scientifiques. Ceux-ci contiennent aussi des excellentes références dans le domaine des lois de conservation.

1.1. LOIS DE CONSERVATION

Intuitivement, en physique, une loi de conservation exprime qu'une propriété mesurable particulière d'un système physique reste constante au cours de l'évolution de ce système. Dans le langage mathématique, une loi de conservation est une relation intégrale qui affirme que le taux de changement de la somme d'une quantité contenue dans un domaine Ω est égal au flux de cette quantité à travers les frontières de Ω . Plus concrètement, en suivant les grandes lignes de [43], si on dit que cette quantité physique a une densité qu'on note $u = u(x, t)$ et que $f = f(x, t)$ est le flux de cette quantité, alors on dit que la quantité satisfait une loi de conservation, si dans un domaine régulier borné Ω , on a la relation

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} f \cdot n dS, \quad (1.1.1)$$

où n est la normale sortante au domaine Ω , dS est l'élément de la surface sur la frontière de Ω . L'intégrale de droite de (1.1.1) mesure le flux sortant du domaine Ω , d'où le sens du signe négatif devant l'intégrale.

Si u est régulière et si le domaine est lisse, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, le terme de gauche de l'égalité ci-dessus peut être réécrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx.$$

Si f est régulière, d'après le théorème de divergence, le terme de droite de l'égalité (1.1.1) peut être réécrit sous la forme

$$- \int_{\partial\Omega} f \cdot n dS = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(f) dx.$$

Ainsi, l'équation de départ peut être réécrite sous la forme

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(f) \right) dx = 0.$$

Si cette relation est valable pour n'importe quel domaine Ω à frontière lisse, en divisant par le volume de Ω et en faisant tendre Ω vers un point x , on obtient l'écriture différentielle de la loi de conservation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} \left(f(u(x, t)) \right) = 0. \quad (1.1.2)$$

De telles équations apparaissent naturellement en physique. Les lois de conservation jouent un rôle fondamental en physique comme la conservation de la masse, de l'énergie (y compris l'énergie de masse en relativité), la conservation de la quantité de mouvement, la conservation du moment angulaire, et la conservation du flux magnétique. Les lois ne s'appliquent pas quand il existe des phénomènes physiques qui entraînent la perte d'une de ces quantités, comme la viscosité, qui entraîne la perte de la quantité de mouvement, sans que le mécanisme soit proprement modélisé, par exemple en ignorant l'équation d'énergie.

Une loi de conservation est dite scalaire si elle peut s'écrire par les équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(u(x, t)) = 0, \quad (1.1.3)$$

où les $A_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières dépendant de $u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction u décrit la "quantité conservée". Souvent, nous allons nous intéresser à des lois de conservation sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, en supposant de plus que A , désormais à valeurs réelles, ne dépend que de u . Ainsi, la divergence devient une simple dérivée par rapport à x .

Définition 1.1.1. *Une loi de conservation scalaire dans une dimension spatiale est une équation aux dérivées partielles du premier ordre de la forme*

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad (1.1.4)$$

où $u = u(x, t)$ est l'inconnue, à valeurs réelles, et où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 . On appelle f le flux.

Dans la plupart des cas, on ne cherche pas à déterminer toutes les solutions de (1.1.4), mais seulement celles qui vont satisfaire une condition initiale prescrite en $t = 0$, de la forme

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.1.5)$$

Ceci conduit à l'introduction de la notion de problème de Cauchy pour une loi de conservation, associant l'équation aux dérivées partielles à une condition initiale donnée. Les conditions frontières considérées sont telles que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = C_{\pm\infty}, \quad (1.1.6)$$

où $C_{\pm\infty}$ sont des constantes, possiblement différentes.

Définition 1.1.2. *La solution d'un problème de Cauchy est une fonction u qui satisfait (1.1.4) et la condition initiale (1.1.5).*

Cette thèse sera en grande partie concernée par l'étude des systèmes de lois de conservation. De façon générale, on peut les présenter par un système de $N \times N$ équations aux dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \frac{\partial}{\partial x} [f_1(u_1, \dots, u_N)] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_2 + \frac{\partial}{\partial x} [f_2(u_2, \dots, u_N)] = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} u_N + \frac{\partial}{\partial x} [f_N(u_1, \dots, u_N)] = 0. \end{array} \right. \quad (1.1.7)$$

Par souci de simplicité, ce système sera écrit de la même forme que (1.1.4), mais on tiendra compte du fait qu'à ce moment $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ est un vecteur en \mathbb{R}^N et que $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ est une fonction vectorielle de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N . Chaque composante de f est une fonction non linéaire de u_1, u_2, \dots, u_N . En introduisant la matrice $A(u) := Df(u)$ qui est la matrice jacobienne de f en u , le système (1.1.7) peut s'écrire sous sa forme quasi-linéaire

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0. \quad (1.1.8)$$

Ce système est dit strictement hyperbolique si les N valeurs propres de $A(u)$ sont réelles et distinctes, $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_N(u)$. On désigne l_1, \dots, l_N , les vecteurs

propres à gauche et r_1, \dots, r_N , les vecteurs propres à droite, associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Ils peuvent être réécrits sous la forme d'une base de sorte que

$$l_i(u) \cdot r_j(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Continuons par donner quelques exemples de loi de conservation intervenant dans des applications classiques issues de la physique, de la biologie ou des sciences de l'ingénieur. Ils sont tous de nature hyperboliques. Ils modélisent essentiellement des phénomènes de propagation.

Exemple 1.1.1 (La circulation automobile, [53]). *L'équation (1.1.4) fournit un modèle simple pour la circulation automobile sur une route à une seule voie : u représente la quantité des voitures par kilomètre et f le flux de voitures par minute qui passent au temps t devant la borne x . On suppose que u est continue et que la vitesse λ des voitures ne dépend que de la densité u des voitures sur la route. Il existe plusieurs modèles pour λ , dont le plus connu est sans doute celui de Lighthill-Whitham-Richards*

$$\lambda(u) = \lambda_{\max} \left(1 - \frac{u}{u_{\max}} \right), \quad \lambda_{\max} \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } u_{\max} \in \mathbb{R}_+^*.$$

La conservation de la quantité de voitures se traduit par l'équation (1.1.4) avec $f(u) = u\lambda(u)$, d'où la loi de conservation est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u\lambda(u))}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.9)$$

Il existe plusieurs extensions de ce modèle, dont l'une à la congestion routière sur des réseaux de routes et d'autres aux routes à plusieurs voies, voir [53].

Exemple 1.1.2 (L'équation de Burgers (sans terme de viscosité), [74]). *Il s'agit en fait du cas non linéaire le plus simple de l'expression générale d'une loi de conservation scalaire présentée au (1.1.2). On considère un milieu unidimensionnel constitué de particules soumises à aucune force et se déplaçant chacune par inertie sur une droite. On note par $u(x, t)$ la vitesse d'une particule se trouvant à l'abscisse x à l'instant t . Si $x = \theta(t)$ représente la position de la particule, alors*

$$\frac{d\theta}{dt} = u(\theta(t), t).$$

La loi de Newton implique que l'accélération est nulle, donc

$$0 = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.1.10)$$

Ainsi, le champ de vitesses du milieu vérifie l'équation (1.1.10) que l'on peut écrire également

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (1.1.11)$$

Cette équation est appelée équation de Burgers (sans terme de viscosité).

Exemple 1.1.3 (Modèle de Buckley-Leverett). Ce modèle est caractéristique des situations rencontrées en exploitation pétrolière. Soit u la saturation en eau dans un mélange d'eau et de pétrole, $0 \leq u \leq 1$ ¹. Nous considérons une coupe unidimensionnelle du sous-sol. Au temps initial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x, \end{cases}$$

ce qui signifie qu'il y a de l'eau à gauche et du pétrole à droite. On cherche à chasser le pétrole vers la droite grâce à l'eau qui a été injectée par un puit d'injection. Mathématiquement, il s'agit d'un cas particulier de la loi de conservation hyperbolique de Buckley-Leverett.

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2}.$$

$\alpha > 0$ est un paramètre.

Exemple 1.1.4 (La dynamique des gaz, [29]). En effet, considérons un fluide parfait compressible. Alors un écoulement unidimensionnel est modélisé, en coordonnées eulériennes, par :

L'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0;$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0;$$

L'équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0;$$

où ρ représente la densité du fluide, u la vitesse et e l'énergie totale spécifique. La pression p est donnée par une équation d'état en fonction des quantités ρ et u . La forme particulière du p dépend de la thermodynamique du gaz à l'étude.

Exemple 1.1.5 (Modèle de Saint-Venant pour les écoulements en eaux peu profondes). Le modèle de Saint-Venant est constitué de deux lois de conservation :

1. $u = \frac{\text{volume occupé par l' eau}}{\text{volume occupé par l' eau} + \text{volume occupé par le pétrole}}$

une équation de conservation de la masse et une équation de conservation de la quantité de mouvement. Ce système possède une propriété remarquable similaire à celle mise en évidence par Riemann pour les équations de la dynamique des gaz : certaines quantités, fonctions de la hauteur et de la vitesse de l'eau, se propagent telles des ondes à des vitesses différentes de la vitesse de l'eau le long du canal. Les équations de Saint-Venant s'écrivent :

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (1.1.12)$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right)_x + gha_x = 0. \quad (1.1.13)$$

Les inconnues sont : la hauteur d'eau $h(x, t)$ et la vitesse horizontale $u(x, t)$ de la colonne d'eau. La hauteur du fond est a . La surface libre se trouve donc à la hauteur $h + a$. Dans le cas de solutions régulières, les équations de Saint-Venant impliquent la conservation de l'énergie $E = h\frac{u^2}{2} + g\frac{h^2}{2} + gha$, qui s'écrit $E_t + \left(\left(E + g\frac{h^2}{2}\right)u\right)_x = 0$. Supposons que le fond est plat, i.e. que $a_x = 0$. En posant

$$w = (h, hu)^t \text{ et } f(w) = \left(hu, hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right)^t,$$

les équations de Saint Venant prennent la forme d'un système hyperbolique, non linéaire, de la forme (1.1.4). Ce système est utilisé en pratique pour simuler les écoulements d'une rivière et les écoulements le long des côtes.

Pour beaucoup de problèmes issus de la physique, il est plus réaliste d'écrire que la solution u satisfait

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.1.14)$$

où ε est un petit paramètre strictement positif et le terme εu_{xx} modélise un phénomène de dissipation de u . On dit qu'il s'agit d'un terme de viscosité par analogie à la viscosité physique $\mu \nabla \cdot (\nabla u^T + \nabla u)$. Plus généralement, les lois de conservation non linéaires de la forme (1.1.4) sont des modèles simplifiés de phénomènes physiques à l'intérieur desquels nous avons fait le choix de négliger la diffusion (ordre 2), la dispersion (ordre 3) et les autres processus d'ordres supérieurs. Ces phénomènes sont aussi conservatifs dans la mesure où les termes diffusifs, dispersifs s'écrivent $\mathcal{R}(u, u_x, \dots)_x$. Ces effets d'ordre supérieurs pourraient être incorporées dans d'autres lois de conservation, possiblement pour des quantités mesurées à l'extérieur du domaine Ω . Ces phénomènes physiques négligées ne contredisent pas le principe de conservation mais sont présents car une partie du système thermodynamique est négligée.

1.2. THÉORIE SCALAIRE

Notre but dans cette section est d'explorer la théorie des lois de conservation scalaires. Nous montrerons tout d'abord comment déterminer la solution classique, quand elle existe, par la méthode des caractéristiques. Cependant, de par le caractère non linéaire de l'équation, de telles solutions classiques ne peuvent exister globalement en temps et, typiquement, des discontinuités peuvent apparaître : ce sont les chocs. La fonction u est alors une solution faible du problème, au sens des distributions. Nous montrons que la vitesse de propagation du choc doit vérifier une condition, appelée condition de Rankine-Hugoniot.

1.2.1. Solutions classiques

Notre première question est de savoir si le problème (1.1.4) et la condition initiale (1.1.5) admet en général au moins une solution régulière. Nous supposons ici que f est de classe C^2 et que $u_0(x)$ est de classe C^1 . Posons $a(u) = f'(u)$, de sorte que a est une fonction croissante dès que f est convexe.

Définition 1.2.1. *On dit que u est une solution classique de l'équation (1.1.4) dans un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ si c'est une fonction $C^1(\Omega)$ de x et de t dans Ω , et si elle satisfait (1.1.4) en chaque point de $\Omega(x, t)$.*

La méthode des caractéristiques

En mathématiques, la méthode des caractéristiques¹ est une technique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Dans certains cas particuliers, elle peut permettre la résolution purement analytique de ces équations.

Si u est une solution classique de (1.1.4), on peut définir les caractéristiques dans la bande $\mathbb{R} \times]0, T[$ comme étant les courbes $t \rightarrow (X(t), t)$ solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = a(u(X, t)), \text{ où } a(u) = f'(u). \quad (1.2.1)$$

Alors on peut dériver u par rapport au temps le long de cette courbe et l'on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(X(t), t)) &= \frac{dX}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(X, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ &= a(u(X, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(X, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

1. Signalons que la notion de caractéristique peut être définie de manière plus générale.

ce qui montre que u est constante le long des caractéristiques. Si la caractéristique $X(t)$ satisfaisant (1.2.1) commence en $x_0 = X(0)$, alors $u(X(t), t) = u(X(0))$ donne la valeur à tout temps t . La valeur de u étant constante le long de X et la vitesse dX/dt était fonction uniquement de $a(u)$, alors les caractéristiques sont des droites d'équation

$$X(t) = a(u_0(X(0)))t + X(0).$$

Ces droites sont appelées les droites caractéristiques pour u de l'équation (1.1.4).

Construction d'une solution classique du problème de Cauchy

La méthode des caractéristiques est une technique à la fois simple et élégante que nous utiliserons pour construire une solution classique du problème de Cauchy pour l'équation de Burgers (1.1.11) avec la condition initiale $u_0(x) = x$. Pour cette équation $a(u) = f'(u) = u$. La droite caractéristique issue de $(\xi, 0)$ est d'équation

$$x(t) = a(u_0(\xi))t + \xi \quad (1.2.2)$$

$$= \xi t + \xi. \quad (1.2.3)$$

La solution u est constante le long des caractéristiques,

$$u(x(t), t) = u_0(\xi) = \xi.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une unique caractéristique passant par (x, t) , et donc $\xi = \frac{x}{1+t}$. Finalement, $u(x, t) = \frac{x}{1+t}$, voir figure (1.1). Il s'agit d'une onde qui se

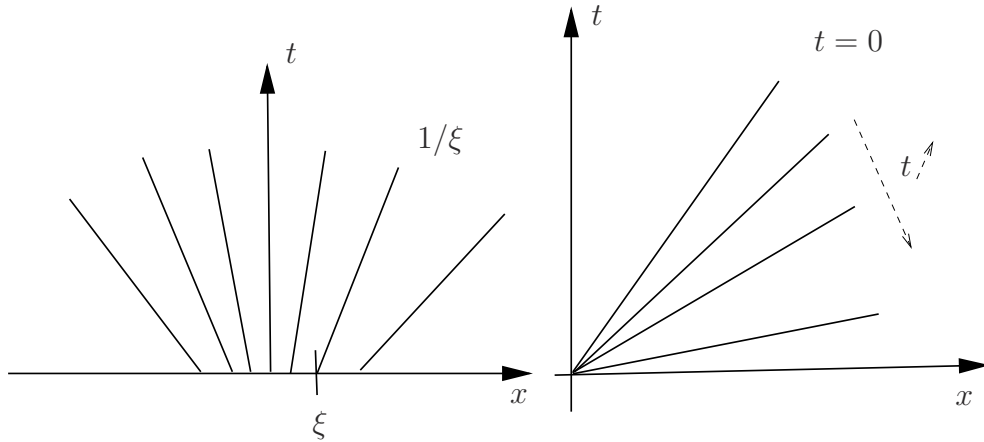


FIGURE 1.1. Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

propage à la vitesse $u(x, t)$. Les droites caractéristiques ne sont pas parallèles. Toutes les valeurs de u_0 ne se propagent pas à la même vitesse. La solution se déforme au cours du temps. Pour que la méthode des caractéristiques définisse

sans ambiguïté la valeur de la solution au point (x, t) , il faut qu'il n'y ait qu'une droite caractéristique qui passe par ce point. On introduit la fonction croissante

$$a_0(x) = a(u_0(x))$$

qui est la vitesse de propagation initiale de la solution au point x . L'existence d'une unique solution globale au problème de Cauchy est assurée par le théorème suivant.

Théorème 1.2.1. *Si $a_0 = a(u_0)$ est croissante sur \mathbb{R} , le problème de Cauchy (1.1.4)-(1.1.5) admet une unique solution classique globale, construite par la méthode des caractéristiques.*

Nous avons supposé que la donnée initiale u_0 est C^1 . Cependant, ces résultats peuvent se généraliser à une donnée initiale u_0 qui est seulement C^1 par morceaux. La méthode des caractéristiques permet alors de construire une fonction u continue et C^1 par morceaux qui vérifie l'équation (1.1.4) point par point dans tout ouvert où elle est C^1 .

Exemple 1.2.1. *Considérons par exemple la condition initiale suivante :*

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{c} & \text{si } 0 \leq x \leq c, \\ 1 & \text{si } x \geq c, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

où c est un réel strictement positif. On veut résoudre le problème de Cauchy (1.1.4)-(1.1.5) pour l'équation de Burgers ($f(u) = \frac{u^2}{2}$ et $a(u) = u$). D'après

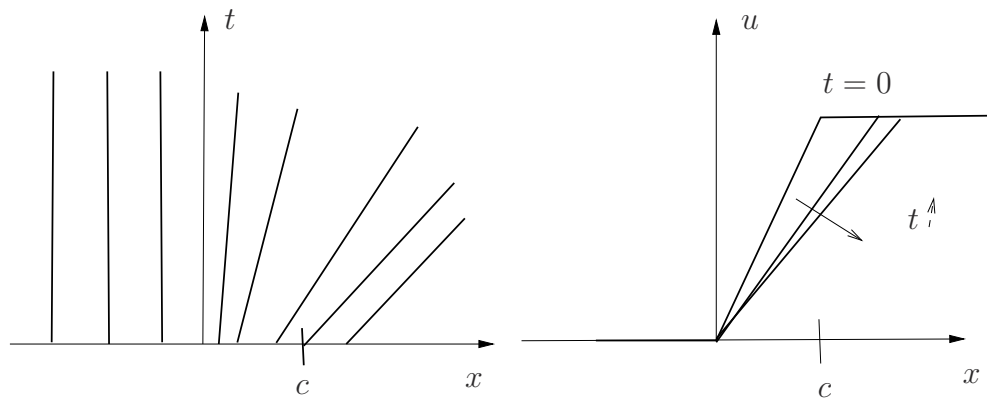


FIGURE 1.2. Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

(1.2.3), la droite caractéristique issue de $(\xi, 0)$ a pour équation

$$\begin{cases} x = \xi & \text{si } \xi \leq 0 \text{ soit } x \leq 0, \\ x = \xi + \frac{\xi}{c}t & \text{si } 0 \leq \xi \leq c \text{ soit } 0 \leq x \leq c + t, \\ x = \xi + t & \text{si } \xi \geq c \text{ soit } x \geq c + t. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

La solution u est alors donnée par (voir figure (1.2) à gauche) :

$$u(x, t) = u_0(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{c+t} & \text{si } 0 \leq x \leq c+t, \\ 1 & \text{si } x \geq c+t. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Pour tout t fixé, la fonction u reste croissante en x .

Existence d'une solution classique locale et naissance d'un choc

La naissance d'une discontinuité, autrement dit d'un choc, est un phénomène purement non linéaire, qui peut se produire même si u_0 est très régulière. Souvent une hypothèse supplémentaire est posée sur la fonction $x \rightarrow u_0(x)$. On demande qu'elle soit une fonction bornée sur \mathbb{R} , ainsi la vitesse initiale a_0 est aussi bornée.

Les solutions classiques peuvent ne pas exister pour tout temps mais seulement localement. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire, peu restrictive en pratique : la fonction $x \rightarrow u_0(x)$ est bornée sur \mathbb{R} . On en déduit bien sur que la vitesse initiale a_0 est elle même bornée.

Théorème 1.2.2 (Temps d'apparition d'un choc). *Si la dérivée de $a_0(x) = a(u_0(x))$ prend des valeurs strictement négatives, alors il n'existe pas de solution classique pour tout temps $t > 0$. Le temps maximal t^* tel qu'il existe une solution classique pour $0 \leq t < t^*$ est donné par*

$$t^* = \frac{1}{\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{-a'_0(\xi)\}} = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \{-a'_0(\xi)^{-1}\}.$$

L'hypothèse assure que $0 < t^* < +\infty$. Ce théorème montre directement que la solution classique ne peut pas exister au delà du temps t^* .

La naissance d'une discontinuité est un phénomène purement non linéaire, qui peut se produire même si u_0 est très régulière.

Exemple 1.2.2. *Considérons par exemple la condition initiale suivante :*

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{x}{c} & \text{si } 0 \leq x \leq c, \\ 0 & \text{si } x \geq c. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

où c est un réel strictement positif. Pour l'équation de Burgers, la droite caractéristique issue de $(\xi, 0)$ a pour équation

$$\begin{cases} x = \xi + t & \text{si } \xi \leq 0, \\ x = \xi + \left(1 - \frac{\xi}{c}\right)t & \text{si } 0 \leq \xi \leq c, \\ x = \xi & \text{si } \xi \geq c. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Le temps critique t^* est égal à c . La solution u , pour $0 \leq t < c$, vaut

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq t, \\ \frac{x - c}{t - c} & \text{si } t \leq x \leq c, \\ 0 & \text{si } x \geq c. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

On peut représenter la solution pour différents temps, voir figure (1.3) à droite. On remarque que la solution reste décroissante en x pour tout t , $0 \leq t < c$.

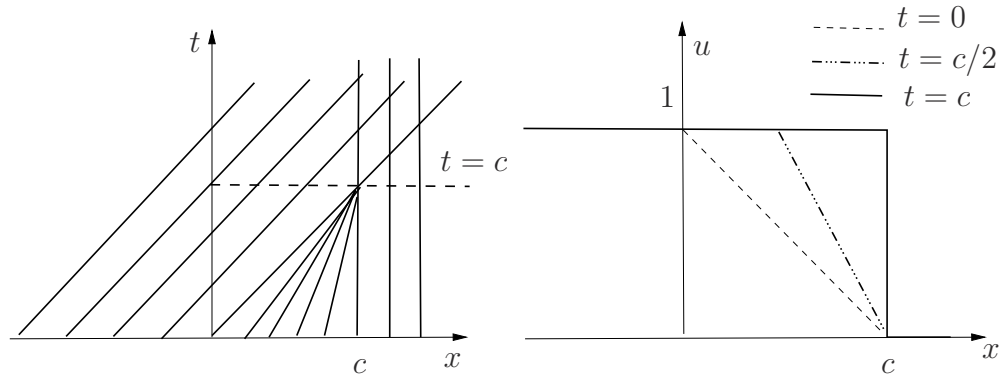


FIGURE 1.3. Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

Lorsque t augmente de 0 à c , la pente de la solution devient de plus en plus raide. À l'instant $t = c$, la dérivée en x de u est infinie en $x = c$. La solution u est discontinue en ce point et n'est certainement plus une solution classique.

1.2.2. Solutions faibles

On vient de voir que même si la donnée initiale u_0 est très régulière, il peut ne pas exister de solution classique au problème de Cauchy pour tout temps $t > 0$. À partir d'un temps critique t^* , la solution u devient discontinue. Cette observation nous conduit à introduire la notion de solution faible. Cette notion est fortement liée avec l'introduction des fonctions tests $\theta : C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ à support compact.

Multiplions (1.1.4) par θ , par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) \right) \theta dx dt \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left(-u \frac{\partial \theta}{\partial t} - f(u) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx dt + \int_{x=-\infty}^{+\infty} u_0(x) \theta(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Cette égalité a un sens même si u n'est pas a priori régulière : il suffit par exemple que u soit localement intégrable. Cette observation nous conduit à introduire la notion de solution faible qui va seulement demander à la solution d'être localement bornée (donc en particulier localement intégrable) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Définition 1.2.2. Soit $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. Une fonction $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, est appelée une solution faible du problème de Cauchy (1.1.4)-(1.1.5) si elle satisfait

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx dt + \int_{x=-\infty}^{+\infty} u_0(x) \theta(x, 0) dx = 0 \quad (1.2.11)$$

pour tout θ de classe C^1 à support compact dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Il existe un lien entre solution faible et solution classique, souvent dite solution forte.

Lemme 1.2.1. Si u est une solution classique du problème de Cauchy (1.1.4)-(1.1.5), alors c'est une solution faible. Si $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est une solution faible du problème de Cauchy (1.1.4)-(1.1.5), alors c'est une solution classique.

DÉMONSTRATION. La première partie a été démontrée. Réciproquement, comme $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ et qu'elle vérifie (1.1.4) au sens des distributions, après intégration par partie, comme dans (1.2.10), elle le vérifie au sens classique, point par point. La condition initiale sera aussi vérifiée pour tout $\theta : C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ à support compact. \square

1.2.3. Condition de Rankine-Hugoniot

Les solutions C^1 par morceaux forment une classe particulière de solutions faibles. Si u est une fonction C^1 par morceaux dans le plan (x, t) et Γ une courbe de discontinuité de u de la forme $(\gamma(t), t)$, on note

- (i) $\mathbf{n} = (n_x, n_t)^t$ la normale unitaire à Γ en $(\gamma(t), t)$ orientée vers les x positifs, de sorte que $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1, -a)^t$ où $a = \gamma'(t)$
- (ii) u_- et u_+ les valeurs de u respectivement à gauche et à droite de Γ ,

$$\begin{cases} u_- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u((x, t) - \varepsilon \mathbf{n}), \\ u_+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u((x, t) + \varepsilon \mathbf{n}). \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Notons que si une fonction u , C^1 par morceaux, admet des discontinuités en valeur ou en dérivée, le long de la courbe Γ , cette fonction ainsi que ses dérivées en temps et en espace admettent des limites de part et d'autre de cette courbe. Nous allons voir cependant que les discontinuités d'une telle solution ne sont pas arbitraires.

Théorème 1.2.3. *Soit u une fonction C^1 par morceaux dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Alors u est une solution faible du problème de Cauchy (1.1.4)-(1.1.5) si et seulement si*

(i) *u est une solution classique de (1.1.4)-(1.1.5) dans tout domaine où elle est C^1 ,*

(ii) *u satisfait la condition*

$$\gamma'(t)(u_+ - u_-) = f(u_+) - f(u_-) \quad (1.2.13)$$

le long de toute courbe de discontinuité Γ .

Nous référons le livre de Bressan [14] et Smoller [74] pour la preuve de ce théorème. On écrira souvent la relation (1.2.13) sous la forme

$$a[u] = [f(u)] \text{ où } a = \gamma'(t).$$

Par analogie à la dynamique des gaz, cette condition de choc est généralement appelée **condition de Rankine-Hugoniot**. Autrement dit, la vitesse du choc est la moyenne de la vitesse des caractéristiques de part et d'autre.

On rappelle qu'il existait une solution continue jusqu'au temps $t^* = c$. La fonction u qui vaut

$$u(x, c) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < c, \\ 0 & \text{si } x > c, \end{cases} \quad (1.2.14)$$

est discontinue en $x = c$. La vitesse de propagation de la discontinuité est calculée pour $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et $a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1}{2}$. Nous allons maintenant prolonger cette solution au delà du temps $t^* = c$ pour construire une solution faible globale, soit la fonction u donnée par

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < c + \frac{t - c}{2}, \\ 0 & \text{si } x > c + \frac{t - c}{2}, \end{cases} \quad (1.2.15)$$

qui est la solution du problème pour $t > c$. On a représenté ci-dessous dans la figure (1.4) les caractéristiques, et la solution à différents temps.

1.2.4. Solutions faibles admissibles

La méthode des caractéristiques montre qu'en général les solutions de l'équation (1.1.4) deviennent discontinues en temps fini, quelle que soit la régularité de

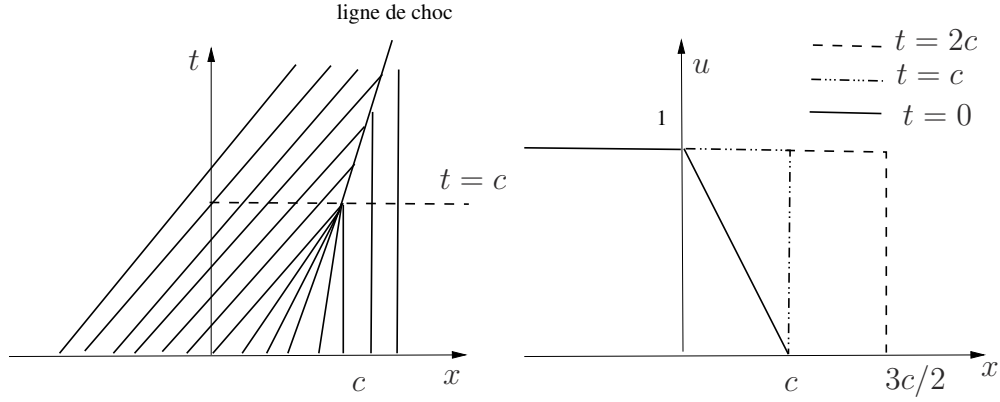


FIGURE 1.4. Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

la donnée initiale, voir le théorème de Rauch [66]. De l'autre côté, la notion de solution faible permet de calculer une solution globale au problème de Cauchy (1.1.4)-(1.1.5) dans des situations où il n'existait pas de solution classique, dite solution forte.

Il est alors nécessaire de décrire un critère qui permettra de trier les solutions faibles pour extraire l'unique solution physique du problème. C'est **la condition d'entropie** qui est une condition additionnelle à ajouter à une solution faible afin de récupérer la solution physiquement acceptable.

Il y a plusieurs notions de condition d'entropie [14]. Citons-en trois.

1. La condition de viscosité évanescence : on exige que les solutions puissent être obtenues par viscosité évanescence, c'est-à-dire comme des limites lorsque ε tend vers zéro des solutions u_ε de l'équation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(f(u_\varepsilon) \right) = \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \quad (1.2.16)$$

et de la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{presque partout, } x \in \mathbb{R} \quad (1.2.17)$$

avec $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Cette condition indique en quelque sorte que la viscosité n'est plus présente dans l'équation, mais intervient encore dans le choix des discontinuités admissibles.

Lemme 1.2.2. Soit $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une suite de solutions de (1.2.16) telles que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)} \leq C \quad \forall \varepsilon > 0$$

et $u_\varepsilon \rightarrow u$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ presque partout dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, alors u est solution au sens des distributions de l'équation (1.1.4).

DÉMONSTRATION. La preuve découle du théorème de convergence dominée de Lebesgue et du fait que la dérivation est une opération continue dans l'espace des distributions. \square

2. On introduit les couples d'entropie (U, F) satisfaisant la définition suivante.

Définition 1.2.3. *On appelle une paire entropie-entropie flux pour l'équation (1.1.4) tout couple (U, F) de fonctions C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :*

(i) *U est une fonction strictement convexe,*

(ii) *$F'(u) = U'(u)f'(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}$.*

Dans le cas scalaire, pour toute fonction convexe U , il existe F satisfaisant (ii). Il est clair que si $U(\cdot)$ et $F(\cdot)$ sont deux fonctions régulières telles que $F'(u) = U'(u)f'(u)$, alors pour u une solution classique de l'équation (1.1.4) on a :

$$U' \frac{\partial u}{\partial t} + U' f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0 \quad (1.2.18)$$

Si u est une solution faible de (1.1.4), elle ne satisfait pas en général l'équation (1.2.18) au sens des distributions. On demande alors que pour toute paire d'entropie et de flux d'entropie (U, F) , u satisfasse la condition faible

$$0 \leq \iint (U(u)\theta_t + F(u)\theta_x) dxdt \quad (1.2.19)$$

pour toute fonction test, positive, à support compact sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. On a le théorème suivant qui lie la condition de la viscosité évanescence et la condition d'entropie au sens faible (1.2.19).

Théorème 1.2.4. *Soit $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une suite de solutions régulières de (1.2.16) vérifiant les condition du lemme (1.2.2), et soit (U, F) une entropie pour l'équation (1.1.4). Alors u vérifie*

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0 \quad (1.2.20)$$

au sens des distributions.

DÉMONSTRATION. On réfère à [31] pour la démonstration détaillée de ce théorème. Les arguments sont similaires à ceux de la démonstration du lemme (1.2.2). \square

3. Conditions portant sur les vitesses de propagation des discontinuités. Une discontinuité séparant deux états u_- et u_+ (à gauche et à droite respectivement) est solution de l'équation au sens des distributions, si et seulement si sa vitesse

de propagation a satisfait la relation de Rankine-Hugoniot

$$a = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}.$$

Cette condition a une interprétation géométrique simple : a doit être égale à la pente de la ligne reliant les points $(u_-, f(u_-))$ et $(u_+, f(u_+))$ dans \mathbb{R}^2 . Cette ligne est en général sécante à la courbe de f .

Pour sélectionner les discontinuités admissibles (que l'on appelle ondes de choc), on introduit *les inégalités de Lax* qui exigent que

$$f'(u_+) \leq a \leq f'(u_-),$$

ce qui signifie que le choc est compressif, c'est-à-dire que les caractéristiques de part et d'autre du choc rentrent dans celui-ci. En utilisant la convexité de f , cela donne

$$u_+ \leq u_-.$$

Pour les solutions C^1 par morceaux dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et la fonction f convexe, les trois conditions d'entropie citées ci-dessus sont équivalentes.

Théorème 1.2.5. [74] *On suppose que f est strictement convexe. Alors la condition de **choc entropique** est équivalente à $u_+ < u_-$ le long de toute courbe de discontinuité Γ .*

Remarque 1.2.1. *En dynamique des gaz, la condition d'entropie se déduit du second principe de la thermodynamique [74]. En effet, ce principe implique que l'entropie augmente à travers un choc, de l'amont vers l'aval de l'écoulement. Il en résulte que la vitesse normale relative du fluide diminue de l'amont vers l'aval. C'est ce qui justifie l'appellation «condition d'entropie».*

Définition 1.2.4. *On appellera **solutions entropiques** les solutions faibles de l'équation (1.1.4) satisfaisant l'un de ces critères d'entropie.*

1.2.5. Existence et unicité de solutions faibles

Le théorème suivant affirme l'existence et l'unicité de la solution faible entropique.

Théorème 1.2.6. (Théorème de Kruzhkov) *Soit f un flux C^2 convexe sur $\{u, |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$ et soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Ces deux conditions impliquent que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

possède une unique solution faible entropique. Cette solution est définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Elle a les propriétés suivantes :

(i) **Principe du maximum-minimum.** Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}} u(x, t); \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x), \quad \forall t.$$

(ii) **Continuité dans L^1_{loc} .** Pour tout $X > 0$, la fonction $t \rightarrow u(\cdot, t)$ est continue de $[0, +\infty[$ dans $L^1(-X, X)$. En particulier, la condition initiale est vérifiée au sens

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-X}^X |u(x, t) - u_0(x)| dx = 0.$$

(iii) **Contraction dans L^1 .** Si u_0, v_0 sont des données initiales dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et si $u(x, t), v(x, t)$ sont les solutions correspondantes, alors pour tout $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v_0(x)| dx.$$

Plus précisément, si $A = \max \{f'(u), |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$, on a pour tout $x_1 < x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 + At}^{x_2 - At} |u_0(x) - v_0(x)| dx, \quad (1.2.22)$$

pour tout $t > 0$.

Remarque 1.2.2. Le théorème de Kruzhkov est vrai pour tout flux C^1 . Dans le cas d'un flux C^2 convexe, on a vu que les conditions d'entropie de Lax et de type entropie-flux, coïncident.

Remarque 1.2.3. L'inégalité (1.2.22) signifie que la valeur de u au point (x, t) ne dépend que des valeurs de u_0 dans l'intervalle $[x - At, x + At]$. Autrement dit, la solution entropique a une vitesse de propagation finie.

Différents auteurs, en particulier E. Hopf [37], P.D.Lax [43], O. Oleinik [62], Kruzhkov [41], Glimm [30], sous diverses conditions ont montré l'existence globale d'une unique solution entropique. Nous avons énoncé, sans le démontrer en détail, le résultat fondamental de la théorie des lois de conservation scalaire qui assure l'existence et l'unicité d'une solution entropique au problème de Cauchy.

1.3. THÉORIE POUR LES SYSTÈMES

La théorie des systèmes de lois de conservation est délicate et présente toujours de nombreux problèmes ouverts. Nous nous contentons ici de rassembler un certain nombre de résultats qui sont pour la plupart disséminés dans la littérature.

Un système de lois de conservation dans une variable d'espace est une équation aux dérivées partielles de la forme

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1.3.1)$$

où $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, l'inconnue $u : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^N$, le flux $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe C^2 . Comme dans la théorie scalaire, les équations sous la forme (1.3.1) sont appelées lois de conservation, puisque pour toute solution régulière u de (1.3.1), l'équation (1.3.1) implique que

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b \partial_t u(x, t) dx = - \int_a^b \partial_x f(u) dx = -f(u(b)) + f(u(a)),$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Une interprétation de cette identité est que le taux de variation de la quantité u contenue dans l'intervalle $]a, b[$ dépend seulement du flux entrant en a et sortant de b .

1.3.1. Résumé de la de littérature

On appelle théorie de "well-posedness" un résultat établissant l'existence, l'unicité et la stabilité d'une classe de solution. Cela étant dit, l'état de l'art pour les lois de conservation est, en très grandes lignes, ce qui suit.

- Pour les lois de conservation scalaire avec plusieurs variables d'état, il existe une théorie bien établie et tout à fait satisfaisante qui remonte aux travaux de Kruzhkov [41]. En fait, il existe plusieurs théories pour le cas scalaire, dont celle des semi-groupes [22], et celle de différences finies dans [74].
- Pour les systèmes de lois de conservation dans une variable spatiale (1.3.1), l'existence globale en temps des solutions était établie par Glimm [30]. Les résultats de l'unicité sont beaucoup plus récents et refléteraient le travail de Bressan et plusieurs collaborateurs (voir le livre de Bressan [14] pour un aperçu). Cependant, il faut noter, que la théorie de "well-posedness" qui est actuellement disponible nécessite la condition de données initiales à petites variations.
- Le cas des systèmes de lois de conservation de plusieurs variables d'espace est, dans un large point de vue, encore très mal compris. Aucun résultat global de l'existence ou l'unicité n'est actuellement disponible pour les systèmes généraux. En outre, le problème de Riemann en 2-D pour les équations d'Euler n'a pas de solution complète.

On se concentre alors au cas des systèmes des lois de conservation en une dimension d'espace

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1.3.2)$$

et on suppose, (stricte hyperbolicité), que pour tout $u \in \mathbb{R}^N$, la matrice jacobienne

$$A(u) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

possède N valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_N(u)$. Le système (1.3.2) peut s'écrire sous sa forme quasi-linéaire

$$u_t + A(u)u_x = 0. \quad (1.3.3)$$

Une fonction C^1 , $u = u(x, t)$ est une solution classique à (1.3.2) si et seulement si elle résout (1.3.3). À chaque $\lambda_k(u)$, on associe un vecteur propre à droite r_k

$$A(u)r_k(u) = \lambda_k(u)r_k(u)$$

et un vecteur propre à gauche $l_k(u)$

$$l_k(u)A(u) = \lambda_k(u)l_k(u).$$

Le théorème des fonctions implicites implique que les fonctions $r_k(u)$, $l_k(u)$ et $\lambda_k(u)$ sont de classe C^1 . Notons aussi que $l_k(u)^t \cdot r_j(u) = 0$ pour $j \neq k$, puisque $\lambda_j(u) \neq \lambda_k(u)$. Si la matrice A est à coefficients constants, le système hyperbolique (1.3.3) est dit **linéaire**.

Tout au long de ce chapitre, nous nous attarderons au problème de Cauchy obtenu par le couplage d'équations aux dérivées partielles (1.3.2) avec la donnée initiale de Cauchy

$$u(x_0) = u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.3.4)$$

où u_0 est une fonction donnée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. De plus, nous étudierons exclusivement des problèmes sur \mathbb{R} satisfaisant des conditions asymptotiques

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0.$$

Le cas des conditions frontières sur des domaines de taille fini ne contient pas plus d'information.

Exemple 1.3.1 (Systèmes linéaires). *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} u_t + Au_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

où u est à valeurs dans \mathbb{R}^N et A est une matrice, carrée de dimension N , à coefficients constants. Puisque le système (1.3.5) est hyperbolique, A est diagonalisable dans \mathbb{R} . Alors, il existe une matrice inversible P telle que $A = P\Lambda P^{-1}$ où Λ est la matrice des valeurs propres de A . Si on multiplie le système (1.3.5) par P^{-1} et

on définit $v = P^{-1}u$, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

qui est un système de N équations (de transport) découplées. On peut donc résoudre explicitement le système :

$$u(x, t) = Pv(x, t) = P \begin{pmatrix} v_0^{(1)}(x - \lambda_1 t) \\ \vdots \\ v_0^{(N)}(x - \lambda_N t) \end{pmatrix} \quad (1.3.6)$$

où $v_0 = P^{-1}u_0$. D'où le résultat suivant :

Théorème 1.3.1. *Le problème de Cauchy pour un système linéaire de lois de conservation (1.3.5) admet une et une seule solution, donnée par la formule explicite (1.3.6),*

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^N (l_i \cdot u_0(x - \lambda_i t)) r_i \quad (1.3.7)$$

où $(l_i)_{1 \leq i \leq N}$ et $(r_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont les vecteurs propres (normalisés) à gauche et à droite de la matrice A .

Remarquons que dans le cas scalaire le profil initial est décalé avec une vitesse constante λ . Pour le système (1.3.5), le profil initial est décomposé d'une somme de N ondes, chacune voyageant avec l'une des vitesses caractéristiques $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Les calculs permettant d'obtenir (1.3.6) étant linéaires, le théorème est valable aussi bien pour les solutions régulières que pour les solutions faibles. Pour $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, la fonction (1.3.7) est l'unique solution faible du problème (1.3.5).

1.3.2. La méthode des caractéristiques

Malgré les difficultés techniques, la méthode des caractéristiques peut également être appliquée à l'analyse des solutions d'un système de lois de conservation à condition que le système satisfasse l'hypothèse de stricte hyperbolicité. En utilisant la méthode des caractéristiques combinée avec un schéma d'itération adapté à la méthode, on peut établir l'existence locale en temps et l'unicité des solutions classiques ; voir par exemple le livre de Bressan [14], p. 67-70.

Théorème 1.3.2. *Supposons que $u_0 \in C^1$ est à support compact et que le système (1.3.2) est strictement hyperbolique. Alors, il existe $t^* > 0$ tel que le problème de Cauchy (1.3.1)-(1.3.4) admet une solution classique $u : \mathbb{R} \times [0, t^*[\rightarrow \mathbb{R}^N$.*

Comme dans le cas de l'équation scalaire, l'hypothèse que u_0 soit à support compact peut être relaxée. Malheureusement, la durée d'existence t^* de la solution classique peut être très (trop) court.

1.3.3. Solution faible

Pour obtenir un résultat global d'existence, il devient nécessaire d'élargir le concept de la dérivée d'une fonction possiblement discontinue. Pour cela, il est commode de se plonger dans l'espace des distributions \mathcal{D}' de L. Schwartz [70], dans lequel il est possible de définir des dérivées au sens faible. On est donc conduit à chercher des solutions faibles (au sens des distributions).

Définition 1.3.1. *Une solution faible du système (1.3.2) avec condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$ est une fonction continue localement intégrable $u \in \mathbb{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \rightarrow \mathbb{R}^N$ vérifiant*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \theta(x, 0) dx = 0, \quad (1.3.8)$$

pour tout $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$.

Toute solution classique est une solution faible : en particulier, la condition (1.3.8) est vérifiée en raison de la formule de l'intégration par parties.

1.3.4. Condition de Rankine-Hugoniot

La traduction de l'équation $u_t + f(u)_x = 0$ au sens faible, en tout point de la courbe Γ , est équivalente à une relation algébrique liant les sauts de u et du flux $f(u)$ à travers la courbe Γ . On sait qu'à travers cette courbe, la fonction $u(x, t)$ peut avoir un saut ou bien, elle est continue mais elle a une dérivée normale ayant un saut. Le cas le plus simple est celui d'une fonction constante par morceaux

$$u(x, t) = \begin{cases} u_+ & \text{si } x > at, \\ u_- & \text{si } x < at, \end{cases} \quad (1.3.9)$$

avec $u_-, u_+ \in \mathbb{R}^N, a \in \mathbb{R}$.

Lemme 1.3.1. *La fonction u dans (1.3.9), régulière sauf le long d'une courbe lisse Γ , est une solution faible du système de lois de conservation (1.3.2), si et seulement si*

$$a[u_+(x, t) - u_-(x, t)] = [f(u_+(x, t)) - f(u_-(x, t))], \quad \forall (x, t) \in \Gamma. \quad (1.3.10)$$

Les relations (1.3.10) s'appellent les conditions de Rankine et Hugoniot pour le système hyperbolique (1.3.2). Elles forment un ensemble de N équations scalaires relatives aux états u_+, u_- ainsi que de la vitesse a . La preuve du lemme suit exactement la présentation dans le cas de loi de conservation scalaire.

Remarque 1.3.1. La relation (1.3.10) peut s'écrire sous sa forme équivalente pour le système quasilinéaire (1.3.3).

$$a[u_+ - u_-] = A(u_+, u_-) \cdot [u_+ - u_-], \quad (1.3.11)$$

où $A(u_+, u_-) := \int_0^1 A(\alpha u_+ + (1-\alpha)u_-)$, ce qui indique que $[u_+ - u_-]$ est un vecteur propre de $A(u_+, u_-)$ et la vitesse a coïncide avec la valeur propre correspondante. Dans le cas scalaire, la vitesse du choc est la pente de la sécante (u_+, u_-) sur le

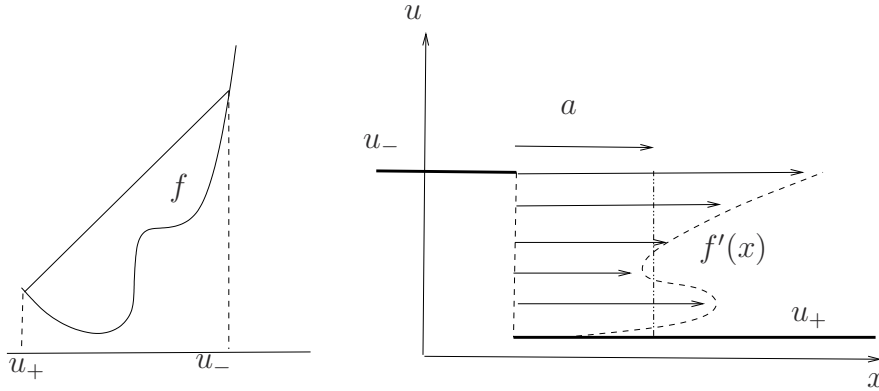


FIGURE 1.5. L'équation de Rankine-Hugoniot dans le cas scalaire.

graphe de f qui n'est rien d'autre que la moyenne des vitesses caractéristiques entre u_- et u_+ .

1.3.4.1. Admissibilité des solutions faibles

Dans la tentative d'établir une théorie d'existence et d'unicité, divers critères d'admissibilité ont été introduits dans la littérature (voir en particulier Dafermos [26]). Introduire un critère d'admissibilité s'élève à introduire des conditions supplémentaires dans la sélection des solutions faibles.

Méthode de la viscosité évanescence

Supposons que le système des lois de conservation (1.3.2) puisse être considéré (sous certaines considérations physiques) comme une approximation d'un système plus général,

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon \Lambda(u), \quad (1.3.12)$$

pour certains $\varepsilon > 0$ petit. Ici, $\Lambda(u)$ est typiquement un opérateur différentiel elliptique en x d'ordre supérieur. On dit alors qu'une solution faible $u = u(x, t)$ du système des lois de conservation (1.3.2) est «admissible» s'il existe une suite de solutions u_ε à l'équation perturbée (1.3.12) qui converge vers u dans L^1_{loc} , quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Un choix naturel est de prendre l'opérateur $\Lambda(u) = u_{xx}$. Cela mène à la

méthode de viscosité évanescence. Cette méthode consiste à approcher la loi hyperbolique par une loi parabolique

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(f(u_\varepsilon) \right) = \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \quad (1.3.13)$$

On peut montrer que cette équation, pour $\varepsilon > 0$ et u_0 assez régulière, admet une unique solution régulière. Cette condition indique en quelque sorte que la viscosité n'est plus présente dans l'équation, mais intervient encore dans le choix des discontinuités admissibles.

Il est très difficile de fournir des estimations a priori sur des solutions générales au système d'ordre supérieur (1.3.12) et de caractériser les limites correspondantes quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Pour les approximations (1.3.13), cet objectif n'a été atteint que récemment dans [17], dans la classe des solutions à faible variation totale.

Inégalités d'entropie

Une autre idée consiste à restreindre l'ensemble des solutions faibles admissibles de façon à ce que les solutions de type "limite visqueuse" appartiennent à cet ensemble.

Définition 1.3.2. *On appelle un couple entropie-flux d'entropie, pour le système de lois de conservation (1.3.2), les fonctions continuellement différentiables $(U(u), F(u))$ où $U : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ avec $U(u)$ convexe tel que*

$$\nabla F(u) = \nabla U(u) Df(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^N. \quad (1.3.14)$$

Notons que (1.3.14) est un système de N équations à 2 inconnues $U(u)$ et $F(u)$. Lorsque $N > 2$ le système est surdimensionné et il n'existe pas nécessairement de solution. Cependant, les systèmes des applications physiques admettent généralement un couple entropie-flux d'entropie.

La définition suivante décrit une solution qui est admissible selon le critère d'inégalité d'entropie. Une telle solution est dite **solution entropique**.

Lemme 1.3.2. *Si $u = u(x, t)$ est une solution C^1 du (1.3.2), alors*

$$U(u)_t + F(u)_x = 0. \quad (1.3.15)$$

Les composantes de U doivent être conservées, même à un choc, mais rien ne garantit que $U(u)$ le sera aussi.

Définition 1.3.3. *Une solution faible $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}^N$ du (1.3.2) est admissible au sens du couple entropie-flux d'entropie (U, F) si elle vérifie l'inégalité*

$$U(u)_t + F(u)_x \leq 0 \quad (1.3.16)$$

au sens des distributions, c'est-à-dire pour toute fonction positive $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} U(u)\theta_t + F(u)\theta_x + \int_{\mathbb{R}} U(u_0(x))\theta(x, 0) \geq 0. \quad (1.3.17)$$

Évidemment, la condition d'admissibilité (1.3.16) ne peut être utile que si l'entropie $U(u)$, convexe, non triviale, est connue pour le système (1.3.2). Dans le cas scalaire les entropies convexes sont faciles à construire.

Proposition 1.3.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$, u_- et u_+ deux états à gauche et à droite de la courbe de discontinuité Γ et u une fonction définie comme (1.3.9). La solution u est une solution entropique si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *Les conditions de Rankine-Hugoniot (1.3.10) sont satisfaites.*
2. *Il existe au moins un couple entropie-flux d'entropie (U, F) , avec U convexe pour lequel on a*

$$a(U(u_+) - U(u_-)) \geq F(u_+) - F(u_-).$$

DÉMONSTRATION. La preuve est en tout point analogue à celle de l'égalité de Rankine-Hugoniot. \square

Critère d'entropie de Lax

Ce critère s'applique uniquement aux solutions qui sont (localement) sous la forme (1.3.9).

Définition 1.3.4. *(Critère de Lax) Soit $u_-, u_+ \in \mathbb{R}^N$ deux états à gauche et à droite de la courbe de discontinuité Γ et soit u une fonction définie par (1.3.9). La discontinuité se propage avec la vitesse $\lambda_k(u_-, u_+)$ égale à une valeur propre de la matrice moyenne $A(u_-, u_+)$. Dans ce cadre, la solution (choc) est dite admissible au sens de Lax, si elle vérifie la condition de Rankine-Hugoniot et si*

$$\lambda_k(u_+) < \lambda_k(u_-, u_+) < \lambda_k(u_-)$$

pour $k = 1, \dots, N$.

Solution générale du problème de Riemann

Le problème de Riemann est très important. D'abord, il est la base de la construction de schémas d'approximation (schéma de Glimm, schéma de suivi du front) qui ont été utilisés pour établir l'existence et l'unicité des solutions. Ensuite, il décrit le comportement local dans l'espace-temps, ainsi que le comportement à longue durée dans le temps de la solution "admissible" d'un problème général de Cauchy. Ce problème a été tout d'abord étudié par Riemann dans [67], pour les

systèmes de la dynamique de gaz isentropique 2×2 . Dans [43], Lax a construit des solutions au problème de Riemann pour une large classe de systèmes strictement hyperboliques de taille $N \times N$. D'autres résultats ont été fournis par Liu dans [54] pour des systèmes sous certaines hypothèses. Récemment, Bianchini a fourni une étude valable même pour les systèmes sous forme non conservative, [10]. Dans ce cas, "les solutions" sont interprétées comme des limites des approximations de la viscosité évanescence. Ce problème a aussi des nombreuses applications numériques pertinentes.

Comme dans le cas scalaire, la solution au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_- & \text{si } x < 0, \\ u_+ & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.3.18)$$

est unique dans la classe des solutions autosemblables. La solution u est une fonction de x/t seulement, ce qu'on exprime par la relation

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Dans la suite, nous allons considérer les systèmes hyperboliques qui satisfont l'hypothèse introduite par Lax dans [43].

Définition 1.3.5. *On dit que le k^e champ caractéristique est vraiment non linéaire si*

$$D\lambda_k(u) \cdot r_k(u) \neq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^N. \quad (1.3.19)$$

Dans ce cas, on normalise $r_k(u)$ par la condition

$$D\lambda_k(u) \cdot r_k(u) = 1, \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \quad (1.3.20)$$

et $l_k(u)$ par

$$l_k(u)^T \cdot r_k(u) = 1, \quad \forall u \in \mathbb{R}^N. \quad (1.3.21)$$

On dit que le k^e champ caractéristique est linéairement dégénéré si

$$D\lambda_k(u) \cdot r_k(u) = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^N. \quad (1.3.22)$$

Notons que dans cette définition, il faut que les conditions (1.3.19) ou (1.3.22) aient lieu pour tout $u \in \mathbb{R}^N$ (ou dans un ouvert de \mathbb{R}^N). Dans le cas vraiment non linéaire, la valeur propre λ_k est strictement croissante le long de la k^e courbe intégrale du champ de vecteur propre correspondant r_k . En revanche, dans le cas du champ linéairement dégénéré, la valeur propre est constante le long de telle courbe. Dans le cas scalaire, on a une seule valeur propre qui est $\lambda(u) = A(u) = f'(u)$. Donc "vraiment non linéaire" signifie simplement que $A(u) \neq 0$, $\forall u \in$

\mathbb{R} , c'est-à-dire que f est strictement convexe ou strictement concave. De même, "linéairement dégénéré" signifie que $\lambda(u) = A(u) = \text{constante}$.

Définition 1.3.6. Une fonction de classe C^1 , $\omega : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée k -invariant de Riemann pour (1.3.2) si

$$D\omega(u) \cdot r_k(u) = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^N. \quad (1.3.23)$$

Un k -invariant de Riemann est constant le long des courbes intégrales de r_k . En effet, soit $\xi \rightarrow v(\xi)$ une courbe intégrale du champ de vecteurs propres à droite $r_k(u)$, k fixé, c'est-à-dire une solution de $v'(\xi) = r_k(v(\xi))$. On a

$$\frac{d}{d\xi} \omega(v(\xi)) = D\omega(v(\xi)v'(\xi)) = D\omega(v(\xi))r_k(v(\xi)) = 0.$$

Dans le cas d'un système hyperbolique, on peut démontrer que le système (1.3.2) possède pour tout k , $(N - 1)$ k -invariants de Riemann dont les gradients sont linéairement indépendants. Toutefois, il n'y a pas nécessairement d'invariants de Riemann partagés par les différentes familles d'ondes.

k-ondes de détente

Définition 1.3.7. On appelle k^e -courbe de détente, notée $R_k(u_0)$, la courbe intégrale du champs de vecteur r_k qui passe par u_0 , u_0 fixé dans \mathbb{R}^N .

Elle est obtenue en résolvant le problème de Cauchy $\frac{du}{d\xi} = r_k(u)$, $u(0) = u_0$. En notant la solution autosemblable de l'équation (1.3.2) par $u(x, t) = v(\xi)$, ou v est C^1 , v' étant non nulle sur un intervalle I , $\xi = \frac{x}{t}$ et en substituant dans (1.3.2), on obtient

$$\left(A(v(\xi)) - \xi I_d \right) v'(\xi) = 0. \quad (1.3.24)$$

Puisque $v'(\xi) \neq 0$ sur I , il existe k tel que

$$v'(\xi) = \alpha(\xi) r_k(v(\xi)), \quad \lambda_k(v(\xi)) = \xi \quad \text{sur } I. \quad (1.3.25)$$

Dérivant la deuxième équation par rapport à ξ , on obtient

$$D\lambda_k(v(\xi))v'(\xi) = 1$$

et en utilisant la première équation on a

$$\alpha(\xi) D\lambda_k(v(\xi)) r_k(v(\xi)) = 1.$$

Si le k^e -champ est vraiment non linéaire, normalisé par $D\lambda_k(v) \cdot r_k(v) = 1$, alors on a $\alpha(\xi) = 1$ et donc

$$v'(\xi) = r_k(v(\xi)); \quad \lambda_k(v(\xi)) = \xi, \quad (1.3.26)$$

ce qui montre en particulier que (par définition) v est une courbe intégrale du champ r_k , c'est-à-dire que $u(x, t) = v(x/t)$ est une k -**onde simple**. Nous désignerons cette courbe comme

$$\xi \rightarrow R_k(\xi)(u_-) = R_k(u_-).$$

Dans le cas vraiment non linéaire, nous choisissons toujours l'orientation de telle sorte que la valeur propre λ_k augmente lorsque le paramètre ξ augmente le long de la courbe.

L'analyse précédente démontre le théorème suivant.

Théorème 1.3.3. (*Existence de la k^e -onde de détente*). On suppose pour un certain $k = 1, \dots, N$ qu'on a :

- (i) le couple $(\lambda_k(u), r_k(u))$ soit vraiment non-linéaire,
- (ii) $u_+ \in R_k^+(u_-) := \{u \in R_k(u_-) / \lambda_k(u_-) \leq \lambda_k(u)\}$,

Alors il existe une solution faible continue u du problème de Riemann (1.3.18) appelée k -**onde simple**, constante le long du chemin traversant l'origine.

Soit maintenant u_- , u_+ deux états constants appartenant à la même courbe intégrale de r_k vérifiant

$$\lambda_k(u_-) \leq \lambda_k(u_+).$$

Le théorème précédent montre que la fonction u définie par

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{si } x/t \leq \lambda_k(u_-), \\ v\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } \lambda_k(u_-) \leq x/t \leq \lambda_k(u_+), \\ u_+ & \text{si } \lambda_k(u_+) \leq x/t \end{cases} \quad (1.3.27)$$

est une solution faible continue du problème de Riemann, appelée **ondes de détente** joignant les états u_- et u_+ .

Ondes de choc - L'ensemble de choc

Dès que la condition de Rankine-Hugoniot $f(u_-) - f(u_+) = a(u_- - u_+)$ est satisfaite pour $a \in \mathbb{R}$, u_- et $u_+ \in \mathbb{R}^N$, alors il existe une courbe de choc d'équation $x = at$. Cette courbe sera paramétrée comme

$$\xi \rightarrow S_k(\xi)(u_-) = S_k(u_-).$$

En utilisant une paramétrisation appropriée, on peut montrer que les deux courbes R_k , S_k se croisent au point u_- . Plus précisément, les estimations suivantes ont lieu.

$$\begin{cases} R_k(\xi)(u_-) &= u_- + \xi r_k(u_-) + \mathcal{O}(1)\xi^2, \\ S_k(\xi)(u_-) &= u_- + \xi r_k(u_-) + \mathcal{O}(1)\xi^2, \end{cases}$$

$$|R_k(\xi)(u_-) - S_k(\xi)(u_-)| = \mathcal{O}(1)\xi^3,$$

$$\lambda_k(S_k(\xi)(u_-), u_-) = \lambda_k(u_-) + \frac{\xi}{2} D\lambda_k(u_-) \cdot r_k(u_-) + \mathcal{O}(1)\xi^2. \quad (1.3.28)$$

Le symbole de Landau $\mathcal{O}(1)$ désigne une fonction dont la valeur absolue satisfait $\lim_{\xi \rightarrow 0} \mathcal{O}(1) = C \neq 0$.

Le théorème suivant précise la structure de l'ensemble de choc.

Théorème 1.3.4 (Structure de l'ensemble de choc). *Soit u_0 fixé dans \mathbb{R}^N . Dans un voisinage de u_0 ,*

$$S(u_0) = \cup_{k=1}^N S_k(u_0)$$

où $S_k(u_0)$ sont des courbes régulières pour k fixé de 1 à N .

$S_k(u_0)$ possède les propriétés suivantes :

- (i) $S_k(u_0)$ passe par u_0 et est tangente à $r_k(u_0)$,
- (ii) $\lim_{u \rightarrow u_0} a(u, u_0) = \lambda_k(u_0)$, $u \in S_k(u_0)$,
- (iii) $a(u, u_0) = \frac{1}{2}(\lambda_k(u) + \lambda_k(u_0) + \mathcal{O}(|u - u_0|^2))$ quand $u \rightarrow u_0$ avec $u \in S_k(u_0)$.

Définition 1.3.8. *Un k -choc est une solution du système (1.3.2) au voisinage d'une courbe régulière Γ , continue à droite et à gauche de Γ , et vérifiant la condition de Lax : $u_+ \in S_k(u_-)$ et*

$$\lambda_k(u_+) \leq a(u_-, u_+) \leq \lambda_k(u_-). \quad (1.3.29)$$

On dit que le choc est admissible au sens de Lax. La vitesse est monotone croissante le long de la courbe de choc.

Discontinuités de contact

On suppose maintenant que le couple $(\lambda_k(u), r_k(u))$ est linéairement dégénéré et $u_+ \in S_k(u_-)$. Remarque que les courbes $R_k(u_-)$ et $S_k(u_-)$ coïncident au moins au premier ordre en u_- . Avec l'hypothèse de dégénérescence linéaire, on peut montrer qu'en fait elles coïncident partout. Montrons le théorème suivant.

Théorème 1.3.5 (Dégénérescence linéaire). *On suppose pour k fixé, $k = 1, \dots, N$, que le couple $(\lambda_k(u), r_k(u))$ soit linéairement dégénéré. Alors pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^N$,*

- (i) $R_k(u_0) = S_k(u_0)$ et
- (ii) $a(u, u_0) = \lambda_k(u) = \lambda_k(u_0)$ pour tout $u \in S_k(u_0)$.

Nous pouvons donc définir la solution du problème de Riemann en joignant 2 états donnés u_- et u_+ par d'autres sortes d'ondes de choc comme étant :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{si } x < at, \\ u_+ & \text{si } x > at. \end{cases} \quad (1.3.30)$$

pour $a = a(u_-, u_+) = \lambda_k(u_-) = \lambda_k(u_+)$. Dès que $\lambda_k(u_-) = \lambda_k(u_+)$, les projetés de la caractéristique ont la même valeur de part et d'autre de la droite de discontinuité et donc $x = at$ est appelé une **k -discontinuité de contact**.

Théorème 1.3.6 (Lax [43]). *Supposons que le système (1.3.2) est strictement hyperbolique et que chaque champ caractéristique est vraiment non linéaire ou linéairement dégénéré. Pour $|u_- - u_+|$ suffisamment petite, le problème de Riemann (1.3.18) admet une solution entropique unique dans la classe des solutions auto-semblables. Cette solution est formée de $N + 1$ états constants $u_- = u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N = u_+$. Lorsque le k^e champ caractéristique est linéairement dégénéré, u_k est rattaché à u_{k-1} par une discontinuité de contact; Lorsque le k^e champ caractéristique est vraiment non linéaire, u_k est joint à u_{k-1} par une k -onde de détente ou par un k -choc compressif.*

Au titre d'exemple, on applique le théorème de Lax pour la construction de la solution du problème de Riemann pour le système d'Euler (1.1.4), dans le cas unidimensionnel.

Exemple 1.3.2. *Le système des équations d'Euler (1.1.4), pour le cas unidimensionnel peut se réécrire sous forme vectorielle*

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

$$\text{où } u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix} \quad f(u) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}.$$

Cette loi de conservation peut être écrite sous forme quasi-linéaire

$$u_t + A(u)u_x = 0,$$

où les valeurs propres de la matrice jacobienne A sont :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c.$$

Les champs caractéristiques associés à λ_1 et λ_3 sont non linéairement dégénérés, tandis que celui associé à λ_2 est linéairement dégénéré. Le lecteur pourra se référer au [74] pour de plus amples détails. Dans le cadre d'écoulements continus, les quantités appelées invariants de Riemann sont conservées le long des courbes caractéristiques. Les courbes caractéristiques \mathcal{C}^\pm et \mathcal{C}^0 sont définies par :

$$\mathcal{C}^\pm = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \pm c \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^0 = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3.31)$$

La caractéristique \mathcal{C}^- transporte la quantité w_{R_1} et \mathcal{C}^+ transporte w_{R_3} :

$$w_{R_1} = u - \frac{2}{\gamma - 1}c, \quad w_{R_3} = u + \frac{2}{\gamma - 1}c.$$

La caractéristique \mathcal{C}^0 transporte l'entropie s :

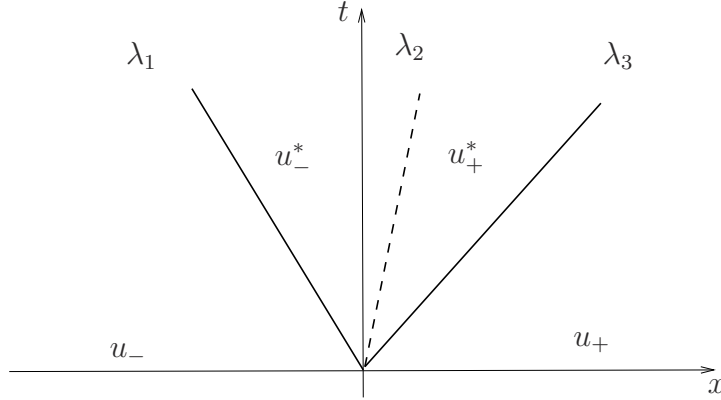


FIGURE 1.6. Représentation du problème de Riemann pour les équations d'Euler dans le plan (x, t) .

$$s = \gamma \log(T) - (\gamma - 1) \log(p).$$

Dans le cas des équations d'Euler, voir figure (??), les états u_- et u_-^* sont séparés par une onde non linéaire (choc ou détente), de même que les états u_+^* et u_+ , alors que les états u_-^* et u_+^* sont séparés par une onde linéairement dégénérée (discontinuité de contact). On remarque que la solution varie selon le paramètre x/t . Dans le cas représenté sur la figure (??) la solution du problème de Riemann s'écrit :

$$u(x/t) = \begin{cases} u_- & \text{si } \frac{x}{t} \leq \lambda_1, \\ u_-^* & \text{si } \lambda_1 \leq \frac{x}{t} < \lambda_2, \\ u_+^* & \text{si } \lambda_2 \leq \frac{x}{t} < \lambda_3, \\ u_+ & \text{si } \lambda_3 \leq \frac{x}{t}. \end{cases}$$

Certaines relations lient les états de part et d'autre de chaque onde.

Onde de détente. La solution est continue et les invariants de Riemann sont égaux dans les états adjacents à une onde de détente. Si λ_1 et λ_3 sont des détentes on a :

$$\left. \begin{array}{l} w_{R_3} = u + \frac{2}{\gamma - 1}c = cst \\ w_{R_2} = s = cst \end{array} \right\} \text{pour } \lambda_1, \quad \left. \begin{array}{l} w_{R_1} = u - \frac{2}{\gamma - 1}c = cst \\ w_{R_2} = s = cst \end{array} \right\} \text{pour } \lambda_3.$$

Onde de choc. La solution est discontinue pour chaque variable, elle doit satisfaire les conditions de Rankine-Hugoniot :

$$[\rho u] = a[\rho], \quad (1.3.32)$$

$$[\rho u^2 + p] = a[\rho u],$$

$$[(\rho e + p)u] = a[\rho e].$$

où $[\nu]$ désigne le saut de la quantité ν à travers l'interface, et a est la vitesse de propagation du choc.

Discontinuité de contact. C'est une onde à travers de laquelle $u = \text{cst}$ et $p = \text{cst}$, mais la densité est discontinue, ainsi que toutes les variables qui en dépendent (énergie interne, température, vitesse du son, entropie s , ...). Toute solution discontinue est soumise aux relations de Rankine Hugoniot (1.3.32).

1.4. EXISTENCE GLOBALE DES SOLUTIONS FAIBLES ENTROPIQUES

Nous étudions l'existence globale de solutions faibles au problème général de Cauchy

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.4.1)$$

$$u(x, 0) = \bar{u}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.4.2)$$

Le résultat fondamental prouvé par Glimm [30] fournit l'existence globale d'une solution d'entropie faible, pour toutes les données initiales avec une variation totale suffisamment petite.

Théorème 1.4.1. [Glimm [30] L'existence globale des solutions faibles] Supposons que le système (1.4.1) est strictement hyperbolique, et que chaque champ caractéristique est linéairement dégénérés ou vraiment non linéaire. Alors il existe une constante $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout condition initiale $\bar{u} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ qui satisfait

$$TV \{u\} \leq \delta_0,$$

le problème de Cauchy (1.4.1) a une solution faible $u = u(x, t)$ définie pour tout $t \geq 0$.

Dans la littérature, on trouve deux techniques de construction, le schéma de Glimm et la méthode de suivi de fronts.

1.4.1. Schéma de Glimm

Le schéma de Glimm utilise la classe de fonctions de variation totale bornée sur \mathbb{R} . Nous rappelons que si E est un espace vectoriel normalisé et si I est un intervalle de \mathbb{R} (qui peut être ouvert ou fermé), la variation totale d'une fonction

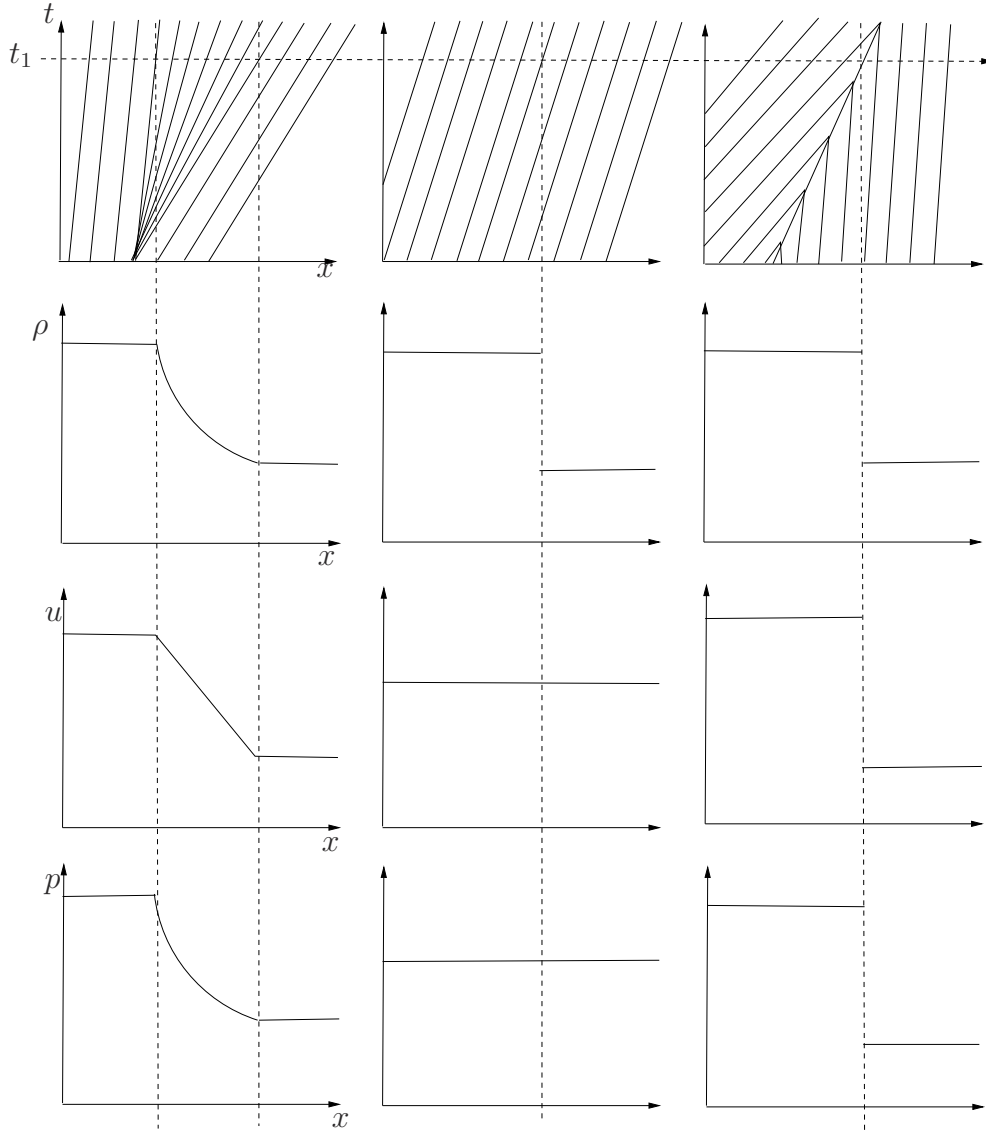


FIGURE 1.7. Structure des caractéristiques et solution au temps t_1 à travers une onde de détente (à gauche), une discontinuité de contact (au centre) et une onde de choc (à droite).

$v : \mathbb{R} \rightarrow E$ sur I , notée $TV(v, I)$ est la limite supérieure de

$$\sum_{j=1}^N \|v(x_j) - v(x_{j-1})\|_E,$$

$x = (x_0, \dots, x_N)$ est une suite finie avec des valeurs dans I . On dit que v est de variation totale bornée sur I si $TV(v, I) < +\infty$. L'ensemble $BV(I; E)$ de ces fonctions est un espace de Banach lorsque nous l'équippede la norme $TV(v; I) + v(y)$, y étant un point choisi dans I . La propriété principale de l'espace BV est le théorème d'Helley.

Théorème 1.4.2. [Helley [11]] *Nous supposons que E est de dimension finie et que I est borné. Alors, l'application canonique de $BV(I; E)$ dans $L^1(I; E)$ est compact.*

Le papier fondamental de Glimm [30] contient la première preuve rigoureuse de l'existence globale de solutions faibles aux systèmes hyperboliques des lois de conservation. Dans ce schéma on travaille avec un maillage fixe dans le plan (x, t) , de taille Δx et Δt . Au temps $t = 0$, la donnée initiale est approchée par une fonction constante par morceaux avec des sauts dans les points du maillage. À chaque pas, il y a un problème de Riemann à résoudre. Par la résolution de ces

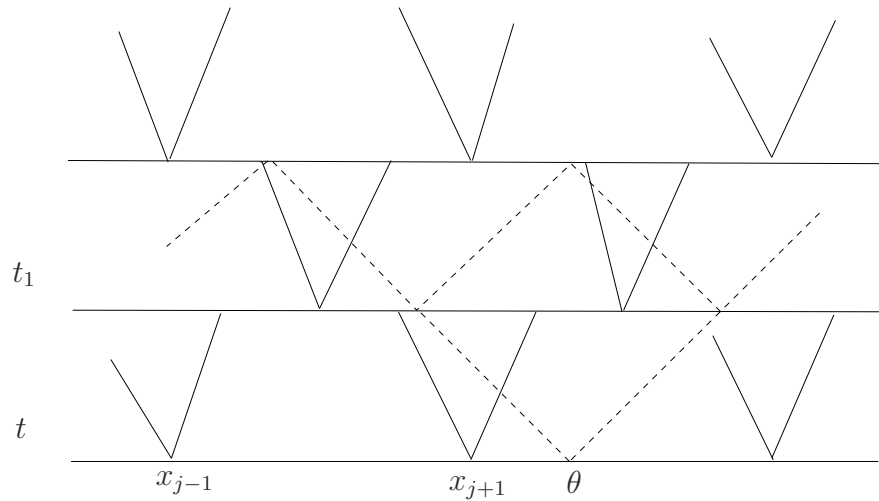


FIGURE 1.8. Schéma de Glimm.

problèmes de Riemann, une solution est construite jusqu'à un temps Δt suffisamment petit, de sorte que les ondes des nœuds différents n'interagissent pas entre eux. Au temps $t_1 = \Delta t$, nous remplaçons la solution $u(\cdot, \Delta t)$ par une fonction constante par morceaux, ayant des sauts exactement aux points du maillage. En résolvant les nouveaux problèmes de Riemann dans chacun de ces points, on peut prolonger la solution pour le prochain intervalle de temps $[\Delta t, 2\Delta t]$. Au temps $t_2 = 2\Delta t$, la solution est approchée de nouveau par une fonction constante par morceaux, etc... Un aspect clé de la construction est la procédure de redémarrage. Le schéma de Glimm est basé sur une méthode du choix aléatoire ; un point θ_i est sélectionné au hasard à l'intérieur de chaque intervalle de J_i . L'ancienne valeur $u(\theta_i, t_{j-})$ est considérée comme la nouvelle valeur $u(x, t_j)$ pour tout $x \in J_i$, voir figure (??). Pour un système strictement hyperbolique de lois de conservation, satisfaisant aux hypothèses de Lax, les résultats fondamentaux de J. Glimm [35] et T.P.Liu [47] ont établi que

1. Si les données initiales $\overline{u}(x)$ ont une variation totale petite, alors une solution approchée peut être construite par l'algorithme ci-dessus pour tout temps $t \geq 0$. La variation totale de $u(\cdot, t)$ reste faible.
2. En laissant la taille de la grille $\Delta t = \Delta x$ tendre vers zéro et en utilisant toujours la même suite de nombres $\theta_i \in [0, 1]$, on obtient une suite de solutions approchées. Par le théorème de la compacité d'Helley, on peut extraire une sous-suite qui converge vers une fonction limite $u = u(x, t)$ dans L^1_{loc} .
3. Si les nombres θ_i sont uniformément répartis sur l'intervalle $[0, 1]$, alors la fonction limite u fournit une solution faible au problème de Cauchy (1.4.1).

1.4.2. La méthode de suivi de fronts

Une autre technique de construction des solutions approchées est la méthode de suivi de fronts. Cette méthode a été introduite par C. Dafermos [25] dans le cas d'équations scalaires ($n = 1$), puis étendue par R. DiPerna [28] aux systèmes vraiment non linéaires ou linéairement dégénérés 2×2 , puis aux systèmes $n \times n$ par A. Bressan [11] et N. H. Risebro [68].

Les données initiales sont approchées par une fonction constante par morceaux et chaque problème de Riemann est résolu approximativement, dans la classe des fonctions constantes par morceaux. En particulier, si la solution exacte contient une détente, celle-ci doit être approchée par une famille de petites détenttes, contenant plusieurs petits sauts. À ce niveau, on a construit une approximation constante par morceaux pour des petits temps, où les états constants sont séparés par des lignes droites qu'on appelle fronts. Ces fronts sont soit des chocs, soit des fronts de détente. Les points auxquels ces fronts se rencontrent sont appelées points d'interaction. Au temps t_1 où deux fronts interagissent, le nouveau problème de Riemann est encore approximativement résolu par une fonction constante par morceaux. La solution est alors prolongée jusqu'au deuxième temps d'interaction t_2 , où le nouveau problème de Riemann est résolu, etc... La construction ci-dessus peut être poursuivie pour toutes les temps $t > 0$, aussi longtemps que

- i. La variation totale $TV \{u(\cdot, t)\}$ reste suffisamment petite. Ceci garantit que tous les sauts $u(x_-, t), u(x_+, t)$ sont petits, donc les problèmes de Riemann correspondants admettent une solution.
- ii. Le nombre total de fronts reste fini.

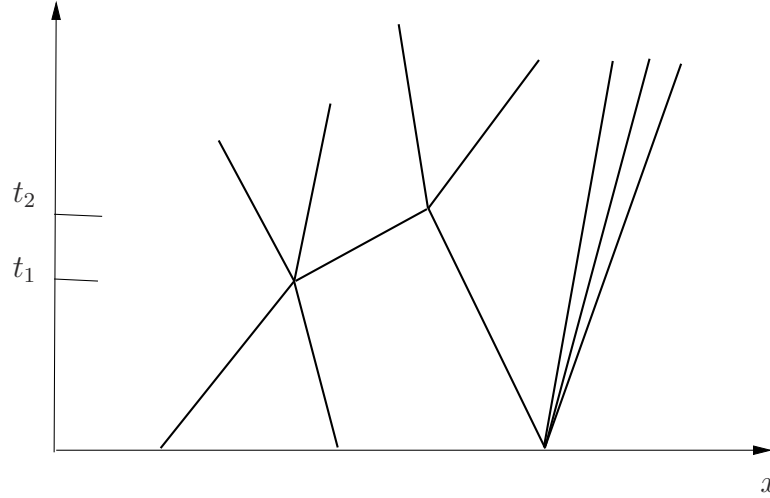


FIGURE 1.9. Une solution approchée construite par le suivi de fronts.

1.4.3. Borne uniforme sur la variation totale

Nous commençons par introduire l'argument principal qui est dû à Glimm : considérer les fonctionnelles "de force" et "d'interaction".

$$V(\tau) = \sum_{\substack{\alpha \\ \text{ondes au temps } t}} |\sigma_\alpha|, \quad (1.4.3)$$

$$Q(\tau) = \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \\ \text{ondes approchantes}}} |\sigma_\alpha| |\sigma_\beta|, \quad (1.4.4)$$

où σ_α est la force du front α , et on dit que le couple d'ondes (α, β) , s'approchent si la famille de α est d'indice strictement supérieur à celui de la famille de β , ou si α et β sont de la même famille et que l'un des deux est un choc.

En analysant les interactions

$$\alpha_i + \beta_j \rightarrow \beta'_j + \alpha'_i + \text{ondes d'autres familles}$$

J. Glimm prouve les relations suivantes (dites estimées de Glimm) :

· Si $i \neq j$,

$$\sigma_{\alpha'_i} = \sigma_{\alpha_i} + \mathcal{O}(\sigma_{\alpha_i} \sigma_{\beta_j}), \quad \sigma_{\beta'_j} = \sigma_{\beta_j} + \mathcal{O}(\sigma_{\alpha_i} \sigma_{\beta_j}). \quad (1.4.5)$$

· Si $i = j$

$$\sigma_{\alpha'_i} = \sigma_{\alpha_i} + \sigma_{\beta_i} + \mathcal{O}(\sigma_{\alpha_i} \sigma_{\beta_j}). \quad (1.4.6)$$

· Pour $k \notin \{i, j\}$

$$\sigma_k = \mathcal{O}(\sigma_{\alpha_i} \sigma_{\beta_j}). \quad (1.4.7)$$

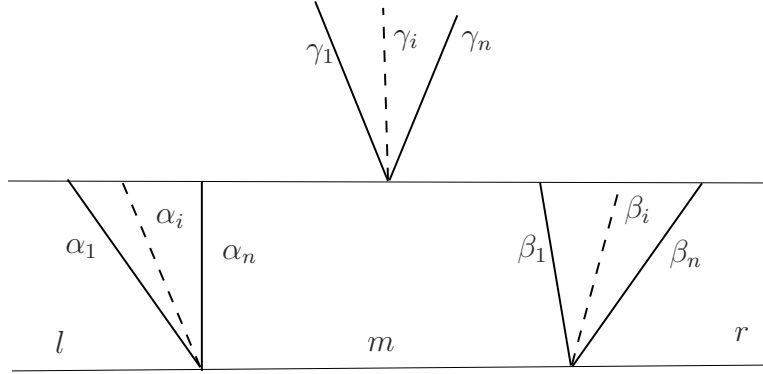


FIGURE 1.10. Les estimées de Glimm. $\gamma_i = \alpha'_i + \beta'_i$, $i = 1, \dots, n$.

Pour un certain $C > 0$, si $TV\{u(x, 0)\}$ est assez petite, alors la fonctionnelle

$$V(t) + CQ(t)$$

est décroissante. Les erreurs dans (1.4.5)-(1.4.6)-(1.4.7), lors d'interactions, peuvent augmenter $V(t)$ mais certains termes de $Q(t)$, disparaissent après l'interaction ainsi $Q(t)$ sera décroissant. Cette décroissance de $V + CQ$ est alors obtenue tant que l'approximation est bien définie, ce qui reste à établir, car il pourrait y avoir en temps fini une accumulation de fronts. On montre que le nombre de fronts reste borné parce que, lorsqu'une interaction a lieu :

- soit cette interaction est grande, et $V + CQ$ décroît beaucoup, cela arrive donc peu souvent,
- soit elle est petite, et on n'ajoute essentiellement pas de nouveau front.

De plus, on peut déduire, de la décroissance de la fonctionnelle de Glimm, une estimée uniforme des approximations dans $L^\infty(BV)$, puis, en utilisant la vitesse finie de propagation des approximations, une estimée uniforme dans $\text{Lip}(L^1)$. Cela donne la compacité recherchée (en utilisant le théorème de Helley), et on montre qu'à la limite, on obtient une solution entropique.

1.4.4. Unicité

Dans les deux méthodes, l'existence de solutions est obtenue par un argument de compacité (théorème de Helley), ce qui ne garantit pas du tout l'unicité. Cette question a été résolue dans les dernières années par Bressan et ses collaborateurs [12], [18]-[19]. Les solutions obtenues comme limite d'approximation par les schémas de Glimm ou de suivi de front sont uniques et dépendent de manière lipchitzienne du temps et de la donnée initiale [19], [56]. Plus précisément, la méthode de suivi de front permet de construire de manière unique un semi-groupe

lipchitzien $(\bar{u}, t) \rightarrow S_t \bar{u}$ défini pour $t \geq 0$ et $\bar{u} \in \mathcal{D} \subset L^1$, qui résout le problème de Cauchy (1.4.1) et dont on peut en fait caractériser les trajectoires.

Soit $u \in \text{Lip}(L^1; [0, T])$ telle que $u(\cdot, t) \in \mathcal{D}$; alors u est une trajectoire du semi-groupe si et seulement si, au voisinage de chaque point $(\xi; \tau)$, pour des temps positifs, u peut être bien approchée par une solution du problème de Riemann et par une solution d'un problème linéaire à coefficients constants là où la variation totale est petite. Pour énoncer un théorème précis, notons

$$u_- = \lim_{x \rightarrow \xi_-} u(x, \tau),$$

$$u_+ = \lim_{x \rightarrow \xi_+} u(x, \tau)$$

et $U_{(u, \xi, \tau)}^1$ la solution du problème de Riemann avec donnée $(u_-; u_+)$. On définit aussi $U_{(u, \xi, \tau)}^2$ la solution du problème de Cauchy linéaire à coefficients constants à donnée en $t = \tau$

$$w_t + df(u(\xi, \tau))w_x = 0; \quad (1.4.8)$$

$$w(x, \tau) = u(x, \tau). \quad (1.4.9)$$

On a alors :

Théorème 1.4.3 ([12]). *Soit $u \in \text{Lip}(L^1; [0, T])$ telle que $u(\cdot, t) \in \mathcal{D}$ pour tout t ; alors, il existe $\bar{u} \in \mathcal{D}$ tel que $u = S_t \bar{u}$ si et seulement si*

$$1. \forall (\xi, \tau), \beta > 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{\xi - \beta h}^{\xi + \beta h} |u(x, \tau + h) - U_{(u, \xi, \tau)}^1(x - \xi, h)| dx = 0,$$

$$2. \exists C, \beta > 0, \forall a < \xi < b, \forall \tau \geq 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} \int_{a + \beta h}^{b - \beta h} |u(x, \tau + h) - U_{(u, \xi, \tau)}^2(x, h)| dx \leq CTV(u(\tau)|_{[a, b]}).$$

Ici, TV est la variation totale d'une fonction.

Le fait surprenant du théorème (1.4.3) est que toute fonction u vérifiant 1.) et 2.) sera en fait une solution de (1.4.1).

On peut montrer que le fait de travailler dans VB, les hypothèses "donnée initiale à variation totale petite" et "système strictement hyperbolique" sont cruciales. Il existe des contre-exemples (voir par exemple [13]) montrant :

1. si le système n'est pas strictement hyperbolique, les solutions peuvent ne pas dépendre continument de la donnée initiale en norme L^1 ,
2. si la donnée initiale est seulement dans L^∞ , l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données sont perdues,

3. si la variation totale à $t = 0$ est grande, alors la norme L^∞ peut exploser en temps fini. En particulier, il n'existe pas de solution globale dans VB [40].

1.5. LES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES COMME MODÈLES DÉGÉNÉRÉS

L'étude théorique des équations aux dérivées partielles (EDP) est un vaste domaine en mathématiques qui est hors du cadre de cette thèse. Toutefois, la théorie mathématique est largement développée et très bien comprise du point de vue de la résolution numérique de ces équations. En particulier, il s'avère simple à approcher numériquement les EDP du premier ordre, s'écrivant de la forme

$$F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = 0,$$

dans une ou plusieurs dimensions d'espace. Cependant, le nombre de solutions d'une EDP peut être très grand. C'est pour cette raison qu'en fait on obtient une solution unique lorsque l'on fixe des conditions supplémentaires du type de Cauchy

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \text{ fixés.}$$

Il faut mentionner que lorsque les EDP proviennent de la modélisation d'un phénomène du monde réel, les solutions intéressantes sont celles qui satisfont certaines conditions supplémentaires appelées "conditions au bord". Il y a bien d'autres sortes de contraintes que l'on rencontre très souvent, comme les conditions de régularité, les conditions initiales, les conditions de comportement à l'infini, les conditions de stationnarité etc...qui ne font pas l'objet de présentation dans ce mémoire. Il est alors possible que le problème considéré "EDP+condition(s) physique(s)" admette une unique solution. Lorsque, de plus, la solution dépend de manière continue des données physiques, dans le sens où une petite erreur sur les données ne change que peu la solution, alors on parlera de problème bien posé. Le concept de "well-posedness" provient d'une définition de Hadamard [33] qui suggérait que les modèles mathématiques de phénomènes physiques devraient avoir les propriétés suivantes :

1. Une solution existe (existence) ;
2. La solution est unique (unicité) ;
3. La solution dépend de façon continue des données dans le cadre d'une topologie raisonnable (stabilité).

Tout l'art de l'analyse numérique consiste à trouver un algorithme stable pour résoudre un problème mathématique bien posé.

Rappelons que pour un système de lois de conservation, les solutions faibles ne sont en général pas uniques. Il faut donc se donner des critères permettant d'isoler les solutions "physiquement" admissibles. Le moyen le plus naturel permettant de traiter le problème de l'absence d'unicité des solutions faibles consiste à se rappeler que les lois de conservation $u_t + f(u)_x = 0$ sont obtenues à partir de systèmes plus complexes, comme celui-ci

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.5.1)$$

les effets de la diffusion ont été négligés. Une conjecture naturelle est donc que les solutions admissibles de $u_t + f(u)_x = 0$ doivent être obtenues comme limites de solutions du système parabolique (1.5.1) quand ε tend vers zéro. Cette méthode a été employée en particulier par S. Bianchini et A. Bressan [17] pour obtenir un résultat très général non seulement d'existence, mais également de stabilité et d'unicité des solutions, sans aucune condition sur les champs caractéristiques. Ce résultat permet même d'aborder le cas de systèmes non conservatifs où la matrice A satisfait la condition de stricte hyperbolicité.

Théorème 1.5.1 (Théorème de Bianchini et Bressan[17]). *Considérons le problème de Cauchy pour le système hyperbolique avec viscosité*

$$u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon = \varepsilon (B(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon)_x, \quad u^\varepsilon(0, x) = \bar{u}(x). \quad (1.5.2)$$

où $A(u)$ est régulière et strictement hyperbolique. La matrice $B(u)$ est uniformément définie positive et symétrique pour u . Alors, il existe des constantes C, L, L' et $\delta > 0$ telles que si $\text{Var.Tot.}(u) < \delta$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, (1.5.2) a une unique solution u^ε définie pour tout $t \geq 0$. En notant $S_t^\varepsilon \bar{u}$ cette solution, on a :

— une borne uniforme sur la variation totale

$$\text{Var.Tot.}(S_t^\varepsilon \bar{u}) \leq C \text{Var.Tot.}(\bar{u}), \quad (1.5.3)$$

— des estimations de stabilité

$$\|S_t^\varepsilon \bar{u} - S_t^\varepsilon \bar{v}\|_{L^1} \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1}, \quad (1.5.4)$$

$$\|S_t^\varepsilon \bar{u} - S_s^\varepsilon \bar{v}\|_{L^1} \leq L' (|t - s| + \sqrt{\varepsilon t} - \sqrt{\varepsilon s}), \quad (1.5.5)$$

— la convergence : quand ε tend vers zéro, les solutions u^ε et v^ε du (1.5.2) pour les conditions initiales \bar{u} et \bar{v} convergent vers une trajectoire d'un semi-groupe S tel que

$$\|S_t \bar{u} - S_s \bar{v}\|_{L^1} \leq L (\|\bar{u} - \bar{v}\| + L' (|t - s|)).$$

Appelons les trajectoires de S "solutions de viscosité évanescence" pour le système hyperbolique $u_t + A(u)u_x = 0$.

Dans le cas conservatif $A = Df$, toute solution de viscosité évanescence est une solution faible du système, qui satisfait la condition d'admissibilité de Liu.

Ce théorème issu de l'article [17] est l'aboutissement de toute une série de travaux [[15]-[16]]. L'idée principale qui a dirigé ces travaux était l'obtention d'estimations BV permettant d'obtenir la convergence sans hypothèses très particulières sur la structure du système décrit par $A(u)$ et $B(u)$. Notons que dans le théorème ci-dessus les hypothèses clés sont seulement la nature strictement hyperbolique du système et la petite variation totale des données initiales. Le théorème démontre, l'existence d'une solution globale pour le problème de Cauchy vérifiant les trois estimations (1.5.3), (1.5.4), (1.5.5).

On trouve dans la littérature que les résultats d'existence et d'unicité étaient basés sur trois techniques principales :

1. Principes de comparaison des équations paraboliques. Pour une loi de conservation scalaire, l'existence, l'unicité et la stabilité globale des solutions de viscosité évanescence ont été établies pour la première fois par Oleinik [62] dans une dimension spatiale. Le célèbre article de Kruzhkov [41] couvre la classe plus générale des solutions BV , dans plusieurs dimensions spatiales. Pour une approche alternative basée sur la théorie des semi-groupes non linéaires, voir aussi [22].

2. Les perturbations singulières. Soit u une solution lisse par morceaux du système $n \times n$ (1.3.1), avec un nombre fini de chocs admissibles à l'entropie. Dans ce cas particulier, à l'aide d'une technique de perturbation singulière, Goodman et Xin [32] ont pu construire une suite de solutions u_ε à (1.5.1), avec $u_\varepsilon \rightarrow u$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Voir aussi [78] pour d'autres résultats dans cette direction.

3. La méthode de compacité par compensation. Si, au lieu d'une limite BV , nous n'avons disponible que la borne uniforme L^∞ des solutions de (1.5.1), on peut encore construire une sous-suite faiblement convergente $u_\varepsilon \rightharpoonup u$. En général, on ne peut s'attendre à ce que cette limite faible satisfasse aux équations non linéaires (1.3.1). Cependant, pour une classe de systèmes 2×2 , dans [28], DiPerna a montré que cette limite u est en effet une solution faible de (1.3.1). La preuve repose sur un argument de compacité compensée, basé sur la représentation de la limite faible en termes de mesures de Young, qui doit se réduire à une masse de Dirac en raison de la présence d'une grande famille d'entropies. Cette technique ne s'applique qu'aux systèmes 2×2 , car pour les systèmes $n \times n$ on ne peut pas garantir l'existence de n entropies. La théorie de compacité compensée a été développée par Luc Tartar.

1.6. LES LOIS DE CONSERVATION NON CONVEXES

1.6.1. Problématique générale

Les solutions non classiques sont des solutions qui sortent du cadre habituel compressif et violent notamment les conditions d'admissibilité au sens de Liu [54] pour les systèmes et elles ne sont pas astreintes à satisfaire aux conditions de compressibilité de Lax dans le cas scalaire. Ces discontinuités sont seulement sous-compressives puisque les caractéristiques associées aux états gauches et droits du choc considéré, se déplaçant à la vitesse λ , le traversent. Elles ne satisfont à fortiori plus à toutes les inégalités d'entropie et elles concernent essentiellement des flux non-convexes, au moins un des champs caractéristiques du système (1.6.1) n'est ni vraiment non linéaire, ni linéairement dégénéré.

Historiquement, les solutions non classiques de lois de conservation sont apparues dans les travaux de physique des matériaux, dans le but de modéliser la dynamique de propagation des ondes de transition de phase (cf. Slemrod [72],[73], Truskinovsky [76],[77], LeFloch [45], Abeyaratne et Knowles [2], [3], puis Hayes et LeFloch [35], LeFloch et Thanh [49]-[52]). Pour une lecture complète sur le sujet, le lecteur pourra se référer à la monographie de LeFloch [46].

Les systèmes hyperboliques, non linéaires, des lois de conservation ont la forme générale

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u = u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{U}, \quad (1.6.1)$$

où le flux donné $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est défini sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ et satisfait à la condition d'hyperbolicité stricte.

Dans cette section, les solutions faibles d'intérêt sont celles qui apparaissent par exemple avec la prise en compte de phénomènes régularisants d'ordre supérieur à deux. De manière générale, elles découlent de l'étude des solutions limites d'une régularisation prenant la forme

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \partial_x \mathcal{R}^\varepsilon(\varepsilon \partial_x u^\varepsilon, \varepsilon^2 \partial_{xx} u^\varepsilon, \dots), \quad (1.6.2)$$

dans laquelle l'opérateur \mathcal{R}^ε prétend restituer la physique pertinente "oubliée" dans la limite du premier ordre (1.6.1). L'opérateur \mathcal{R}^ε dépend de $\partial_x u^\varepsilon, \partial_{xx} u^\varepsilon, \dots$ qui disparaîtront lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Ici, $\varepsilon > 0$ représente un paramètre de petite échelle. Dans les applications, ε correspond à la viscosité, à la capillarité, ... du modèle physique à l'étude. Nous supposons toujours que le système des lois de conservation (1.6.1) est doté d'un couple entropie (strictement convexe)-flux d'entropie (U, F) et que la limite

$$u := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon \quad (1.6.3)$$

existe. Dans beaucoup d'exemples d'intérêt, le système augmenté (1.6.2) admet des solutions lisses, globales en temps, qui sont déterminées uniquement par leurs données initiales. Dans ce contexte, il est donc naturel de choisir les solutions de (1.6.1) qui sont obtenues comme des limites des solutions de la forme (1.6.3). En pratique, il est beaucoup plus simple de résoudre un système de premier ordre comme (1.6.1) qu'un système d'ordre élevé (1.6.2). De plus, le paramètre ε peut être si petit que la résolution numérique du (1.6.2) soit impossible pour des valeurs pratiques de Δx et Δt . Les systèmes (1.6.1), couplés à des conditions locales de stabilité et de conservation (comme R-H, Lax, Oleinik, \dots), sont généralement beaucoup plus utiles que les systèmes (1.6.2) possédant des échelles qui sont plus petites que les échelles de la discrétisation.

1.6.2. Une inégalité d'entropie ?

Nous supposons que le système hyperbolique (1.6.1) est doté d'un couple d'entropie strictement convexe (U, F) satisfaisant la relation de compatibilité $\nabla F = \nabla U \cdot \nabla f$. Il est facile de vérifier, à partir de la définition d'une entropie, [46], que toute solution suffisamment régulière de (1.6.1) satisfait à la loi de conservation supplémentaire

$$U(u)_t + F(u)_x = 0.$$

Définition 1.6.1. *Une version augmentée (1.6.2) d'un système de lois de conservation (1.6.1) doté d'un couple d'entropie strictement convexe (U, F) , est considéré comme conservatif et dissipatif par rapport à l'entropie U si pour tout $\theta = \theta(x, t)$ une fonction lisse, non négative et à support compact,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \mathcal{R}^\varepsilon \theta dt dx = 0, \quad (1.6.4)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \nabla U(u^\varepsilon) \cdot \mathcal{R}^\varepsilon \theta dt dx \leq 0, \quad (1.6.5)$$

respectivement.

Pour les systèmes strictement hyperboliques admettant des champs caractéristiques vraiment non linéaires ou linéairement dégénérés, munis d'une entropie strictement convexe, l'inégalité d'entropie s'avère aussi suffisante pour sélectionner une solution entropique unique, voir [43]. Pour toute fonction test $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$,

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u \partial_t \theta + f(u) \partial_x \theta) dx dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u^\varepsilon \partial_t \theta + f(u^\varepsilon) \partial_x \theta) dx dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \mathcal{R}^\varepsilon \theta dx dt.$$

De l'autre côté, si on multiplie (1.6.2) par $\nabla U(u^\varepsilon)$, on remarque que le côté gauche admet une forme conservative

$$\partial_t U(u^\varepsilon) + \partial_x F(u^\varepsilon) = \nabla U(u^\varepsilon) \cdot \mathcal{R}^\varepsilon.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le côté gauche converge au sens faible, voir [46]; pour tout $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ nous avons

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (U(u^\varepsilon) \partial_t \theta + F(u^\varepsilon) \partial_x \theta) dx dt \rightarrow \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (U(u) \partial_t \theta + F(u) \partial_x \theta) dx dt.$$

De telles solutions faibles sont indépendantes de la régularisation \mathcal{R}^ε tant que le système augmenté est conservatif et dissipatif au sens de la définition (1.6.1).

Théorème 1.6.1. (*L'inégalité de l'entropie*, [46].) *Soit u^ε une famille de solutions approchées données par (1.6.2). Supposons que u^ε reste bornée en norme L^∞ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ($\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} \leq C$) et converge presque partout vers une limite u , (1.6.3). Supposons également que la partie droite \mathcal{R}^ε de (1.6.2) est conservative (1.6.4) et dissipative (1.6.5) pour le système (1.6.1) muni d'un couple d'entropie (U, F) . Alors, u est une solution faible de (1.6.1) et satisfait l'inégalité*

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (U(u) \partial_t \theta + F(u) \partial_x \theta) dx dt \geq 0, \quad \theta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), \quad \theta \geq 0, \quad (1.6.6)$$

Par définition, au sens faible, l'inégalité ci-haut veut dire tout simplement que

$$\partial_t U(u) + \partial_x F(u) \leq 0, \quad (1.6.7)$$

ce qui est l'inégalité de l'entropie associée à la paire entropie-flux d'entropie (U, F) satisfaisant à la relation de compatibilité $\nabla F = \nabla U \cdot \nabla f$ avec U strictement convexe.

1.6.3. Relations cinétiques pour les chocs sous-compressifs

De nombreux modèles dans les sciences physiques n'ont pas de champs caractéristiques vraiment non linéaires ou linéairement dégénérés. Souvent les solutions faibles sont des ondes particulièrement complexes, y compris les chocs non-compressifs. Les solutions non classiques satisfont à l'inégalité d'entropie (1.6.7) héritée de la forme de l'opérateur de régularisation (1.6.2). Dans le cas d'un flux non-convexe, cette inégalité d'entropie ne suffit pas à assurer l'unicité. Une relation cinétique (voir LeFloch [46]) vient compléter l'inégalité d'entropie pour permettre de restituer cette unicité. Elle peut prendre plusieurs formes; on peut quantifier la dissipation d'entropie d'une discontinuité de vitesse donnée (voir Hayes et LeFloch [35]-[36]) ou plus simplement imposer à un choc non-compressif

de vérifier une relation algébrique donnée

$$u_+ = \phi^b(u_-), \quad (1.6.8)$$

entre les états de gauche et de droite de la discontinuité. L'objectif est de montrer que cette caractérisation est simple, a posteriori et sous des hypothèses sur la fonction ϕ^b , suffisamment discriminante pour restituer l'unicité de la solution entropique.

La relation cinétique a été introduite et développée dans le cadre de la dynamique des matériaux en cours de transitions de phase, décrites par le système des deux lois de conservation

$$\begin{aligned} w_t - v_x &= 0, \\ v_t - \sigma(w)_x &= \varepsilon v_{xx} - \alpha \varepsilon^2 w_{xxx}, \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

où v désigne la vitesse, $w > -1$ est le gradient de déformation et $\sigma = \sigma(w)$ est le stress du matériau. Les paramètres ε et $\alpha \varepsilon^2$ représentent la viscosité et la capillarité du matériau.

La recherche mathématique sur (1.6.9) a débuté avec des œuvres de Slemrod en 1984 avec les solutions auto-semblables pour le problème de Riemann [72]-[73] et Shearer en 1986 avec la construction explicite d'un solveur de Riemann lorsque $\alpha = 0$, [71]. En 1993, LeFloch [44] introduit une formulation mathématique de la relation cinétique pour (1.6.9) dans le cadre des fonctions de variation bornée. La relation cinétique a été ensuite étendue aux systèmes hyperboliques généraux par LeFloch ainsi que de nombreux collaborateurs y compris B.T. Hayes (questions fondamentales théoriques et numériques), N. Bedjaoui (les solutions ondes progressives), K.T. Joseph (des approximations auto-semblables), M.-D. Thanh (problème de Riemann), M. Shearer (critère de nucléation), D. Amadori, P. Baiti, M. Laforest, B. Piccoli (méthodes de type Glimm), J.C. Correia, C. Kondo, F. Boutin, C. Chalons, F. Lagoutière, J.-M. Mercier, S. Mishra, M. Mohamadian et C. Rohde (méthodes numériques), pour ainsi créer une théorie mathématique générale de chocs non classiques, laquelle nous essayons brièvement de décrire dans les sections suivantes.

1.6.4. Exemples de modèles de diffusion-dispersion

Nous présentons ici quelques exemples importants qui seront d'un intérêt particulier dans cette présentation. Dans tous ces exemples (et dans bien d'autres encore, voir [47]), les termes de diffusion et de dispersion (viscosité et capillarité) jouent un rôle fondamental dans la dynamique des discontinuités. De nombreuses

études ont été menées et à ce titre nous renvoyons par exemple le lecteur à l'ouvrage [46].

Exemple 1.6.1 (Loi de conservation diffusion-dispersion). *Dans la série de papiers de Bedjaoui et LeFloch [4]-[5]-[7] les auteurs explorent par exemple les solutions ondes progressives limite diffusion-dispersion, qui sont solutions de la régularisation suivante :*

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \left(b(u) u_x \right)_x + \delta \left(c_1(u) \left(c_2(u) u_x \right)_x \right)_x, \quad (1.6.10)$$

où $b(u) > 0$ correspond à un coefficient de diffusion et $c_1(u), c_2(u) > 0$ sont les coefficients de dispersion. Soit (U, F) une paire entropie-flux d'entropie (entropie strictement convexe) satisfaisant

$$U'' = \frac{c_1(u)}{c_2(u)}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (1.6.11)$$

Le dernier terme à droite de (1.6.10) prend une forme plus simple en $\hat{u} = U'$, à savoir

$$\delta \left(c_1(u) \left(c_2(u) u_x \right)_x \right)_x = \delta \left(c_1(u) \left(c_1(u) \hat{u}_x \right)_x \right)_x, \quad (1.6.12)$$

Toute solution de (1.6.10) satisfait à

$$\begin{aligned} \partial_t U(u) + \partial_x F(u) = & \varepsilon \left(b(u) U(u) u_x \right)_x - \varepsilon b(u) U''(u) |u_x|^2 \\ & + \delta \left(c_1(u) \hat{u} \left(c_1(u) \hat{u}_x \right)_x - |c_2(u) u_x|^2 / 2 \right)_x. \end{aligned}$$

Dans la partie droite ci-dessus, la contribution due à la diffusion se décompose en un terme conservatif et un terme non positif (dissipatif). Le terme de dispersion est tout à fait conservatif. Formellement, lorsque ε et $\delta \rightarrow 0$ toute fonction limite satisfait l'unique inégalité d'entropie

$$\partial_t U(u) + \partial_x F(u) \leq 0. \quad (1.6.13)$$

Pour des valeurs b, c_1, c_2 , indépendantes de u , la régularisation diffusion-dispersion est dite linéaire. Pour le flux $f = u^3$, l'entropie est donnée par $U(u) = u^2/2$.

Exemple 1.6.2 (Élastodynamique non linéaire). *Dans la série de papiers de LeFloch et Thanh [49]-[51], les auteurs étudient un modèle hyperbolique non linéaire décrivant les transitions de phases, concernant l'élastodynamique non linéaire. Revenons alors au modèle (1.6.9) sans régularisation, soit*

$$\partial_t v - \partial_x \sigma(w) = 0, \quad (1.6.14)$$

$$\partial_t w - \partial_x v = 0,$$

Pour de nombreux matériaux élastiques, nous avons

$$\sigma'(w) > 0 \text{ for all } w > -1 \quad (1.6.15)$$

afin que (1.6.2) soit strictement hyperbolique et les deux vitesses d'onde sont distinctes, $-\lambda_1 = \lambda_2 = c(w)$ (la vitesse du son). Les deux champs caractéristiques sont vraiment non linéaires si et seulement si σ'' ne s'annule jamais. Or, de nombreux matériaux sont gouvernés par des lois d'état non convexes, de telle sorte que le système hyperbolique de lois de conservation correspondant n'est plus vraiment non linéaire. Dans ce cas, cela signifie que les matériaux peuvent exister sous différentes phases (chacune étant associée à une région de convexité de la loi d'état) correspondant à différents arrangements entre les atomes. La loi d'état σ est alors considérée de la forme concave-convexe, $\sigma'' \geq 0$ si $w \geq 0$, telle qu'elle apparaît de manière standard dans ces situations.

Une paire d'entropie mathématique particulièrement intéressante est celle associée à l'énergie totale du système et donnée par

$$U(v, w) = \frac{v^2}{2} + \Sigma(w), \quad F(v, w) = \sigma(w)v, \\ \Sigma(w) := \int_0^w \sigma(s) ds.$$

Sous l'hypothèse (1.6.15), l'entropie U est strictement convexe.

Exemple 1.6.3 (Dynamique des fluides compressibles). Les changements de phase liquide-vapeur peuvent être modélisés par des lois de pression généralement non convexes, comme par exemple celle introduite par van der Waals, soit

$$\tau_t - u_x = 0, \quad (1.6.16) \\ u_t - p(\tau)_x = \alpha(\beta(\tau)|\tau_x|^q u_x)_x - \tau_{xxx},$$

où u et τ représentent respectivement la vitesse et le volume spécifique du fluide, tandis que β est une fonction lisse et positive, α est un paramètre non négatif qui représente la force de la viscosité et q est un exposant non négatif. La loi de la pression $p = p(\tau)$ est une fonction positive définie pour tout $\tau \in]0, +\infty[$ et de type van der Waals :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} p(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} p(\tau) = 0.$$

Les modèles correspondants sont soit hyperboliques non vraiment non linéaires (la pression est monotone mais non convexe), soit hyperbolique-elliptique (la pression n'est plus monotone). Une paire d'entropie mathématique, pour des systèmes où

$p(\tau)$ est une fonction avec 2 points d'inflexion, est donnée par

$$U(\tau, u) := - \int^\tau p(s) ds + \frac{u^2}{2}, \quad F(\tau, u) = up(\tau).$$

La sélection des ondes de choc, physiquement admissibles, du système de premier ordre est déterminée par les ondes progressives associées au système augmenté (1.6.16).

Exemple 1.6.4 (Modèle magnétohydrodynamique). *Considérons ensuite une version simplifiée des équations de la magnétohydrodynamique*

$$\begin{aligned} v_t + \left((v^2 + w^2)v \right)_x &= \varepsilon v_{xx} + \alpha \varepsilon w_{xx}, \\ w_t + \left((v^2 + w^2)w \right)_x &= \varepsilon w_{xx} - \alpha \varepsilon v_{xx}, \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

où v, w dénotent les composantes transversales du champ magnétique, ε résistance magnétique et α le paramètre de Hall. Ces équations sont une simplification obtenue à l'aide de certaines symétries dans un domaine cylindrique. L'effet Hall, pris en compte dans ce modèle, est pertinent pour étudier, par exemple, le vent solaire de la Terre.

Quand $\alpha = 0$ les équations (1.6.17) ne sont pas strictement hyperboliques, et pour certaines données initiales, le problème de Riemann peut admettre jusqu'à deux solutions, voir Brio and Hunter [20]. Quand $\alpha \neq 0$ LeFloch et Mishra ont démontré numériquement qu'une fonction cinétique peut être associée à ce modèle.

Lemme 1.6.1 (Modèle magnétohydrodynamique). *Pour le modèle augmenté (1.6.2), on a*

$$\frac{1}{2} \left(v_\varepsilon^2 + w_\varepsilon^2 \right)_t + \frac{3}{4} \left((v_\varepsilon^2 + w_\varepsilon^2)^2 \right)_x = -\varepsilon \left((v_\varepsilon^2)_x + (w_\varepsilon^2)_x \right) + \varepsilon C_x^\varepsilon,$$

de sorte que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ l'inégalité d'entropie associée au modèle magnétohydrodynamique

$$\frac{1}{2} \left(v^2 + w^2 \right)_t + \frac{3}{4} \left((v^2 + w^2)^2 \right)_x \leq 0,$$

est vérifiée.

Les discontinuités de type choc (ou transitions de phase) du système hyperbolique sous-jacent dépendront intrinsèquement de l'opérateur de régularisation choisi. Enfin, plusieurs autres modèles physiques, qui cependant, n'ont pas encore reçu autant d'attention que les modèles présentés jusqu'à présent, ont été énumérés dans le manographe [45].

1.6.5. Solveur de Riemann classique

Pour plus de simplicité dans la présentation, nous considérons une équation scalaire

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u = u(x, t) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (1.6.18)$$

avec f un flux concave-convexe qui satisfait

$$\begin{aligned} u f''(u) &> 0 \quad \text{for } u \neq 0, \\ f'''(0) &\neq 0, \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} f'(u) = +\infty. \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

Par définition, les solutions faibles $u \in L^\infty$ de (1.6.18), satisfont

$$\iint (u \partial_t \theta + f(u) \partial_x \theta) dx dt = 0$$

pour toute fonction lisse à support compact θ . Une onde de choc $(u_-, u_+) \in \mathbb{R}^2$, décrite par

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{for } x < at, \\ u_+ & \text{for } x > at, \end{cases} \quad (1.6.20)$$

est une solution faible de (1.6.18) pourvu que la relation de Rankine-Hugoniot (1.2.13) soit satisfaite. Dans le cas de scalaire, cette relation détermine la vitesse choc :

$$a = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+} =: \bar{\lambda}(u_-, u_+). \quad (1.6.21)$$

Motivée par les modèles physiques présentés dans la section précédente, nous imposons que la solution faible satisfasse une inégalité d'entropie unique

$$U(u)_t + F(u)_x \leq 0, \quad U'' > 0, \quad F'(u) = U'(u)f'(u) \quad (1.6.22)$$

pour un couple entropie-flux d'entropie donné. En d'autres mots, comme dans [45], nous imposons que

$$E(u_-, u_+) := -\frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+} (U(u_+) - U(u_-)) + (F(u_+) - F(u_-)) \leq 0.$$

On peut vérifier que

$$E(u_-, u_+) = -\int_{u_-}^{u_+} U''(v)(v - u_-) \left(\frac{f(v) - f(u_-)}{v - u_-} - \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \right) dv.$$

Remarque que l'imposition de l'inégalité d'entropie conduirait à l'inégalité d'entropie de l'Oleinik

$$\frac{f(v) - f(u_-)}{v - u_-} \geq \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad (1.6.23)$$

pour tout v entre u_- et u_+ . Imposer une inégalité d'entropie unique est beaucoup plus faible que d'imposer (1.6.23).

Théorème 1.6.2. (*Inégalités d'entropie d'Oleinik [46].*) Une solution onde de choc de (1.6.18) ayant la forme

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{pour } x < at, \\ u_+ & \text{pour } x > at, \end{cases} \quad (1.6.24)$$

pour certaines constantes u_- , u_+ et a , avec $u_- \neq u_+$, satisfait l'inégalité d'entropie (1.6.22) si et seulement si les inégalités d'entropie d'Oleinik (1.6.23) sont satisfaites pour tous les v entre u_- et u_+ . En outre, (1.6.22) et (1.6.23) impliquent des inégalités de choc Lax

$$f'(u_-) \geq a \geq f'(u_+). \quad (1.6.25)$$

Les ondes de choc (1.6.20)-(1.6.21) forment une classe spéciale de solutions pour le problème de Riemann associé à (1.6.18). Pour un état de gauche donné u_- , on note par $\mathcal{S}(u_-)$ l'ensemble de tous les états de droit joignables par une onde de choc (classique), satisfaisant (1.6.22). Lorsque le flux est convexe,

$$]-\infty, u_-] \subseteq \mathcal{S}(u_-).$$

De plus, on note par $\mathcal{R}(u_-)$ l'ensemble de tous les états de droit joignables par une onde de détente. En utilisant le fait que $x \rightarrow f'(u(x, t))$ croît à travers une détente (dans l'intervalle $x \in [tf'(u_-), tf'(u_+)]$, lorsque le flux est convexe,

$$[u_-, +\infty[\subset \mathcal{R}(u_-).$$

Le théorème suivant combine l'ensemble de ces ondes simples et construit une solution auto-semblable pour le problème de Riemann avec le flux f convexe.

Théorème 1.6.3. (*Problème de Riemann-flux convexe, [46].*) Supposons que le flux f est convexe et les données Riemann u_- et u_+ sont fixées. Le problème de Riemann associé à (1.6.18) admet une unique solution classique entropique (dans la classe des fonctions lisses par morceaux) $u = u(x/t)$, composée d'ondes de choc satisfaisant (1.6.22) et d'ondes de détente, comme suit :

- (a.) si $u_+ \geq u_-$, la solution u est une onde de détente, monotone reliant continûment u_- à u_+ .
- (b.) si $u_+ < u_-$, la solution est une onde de choc reliant u_- à u_+ .

Dans les deux cas, la solution est toujours monotone.

La construction lorsque f est concave est tout à fait analogue.

Revenons maintenant au flux (1.6.19). Il est normalisé afin d'avoir un unique point d'inflexion en $u = 0$. Le prototype d'intérêt est le flux cubique $f = u^3$. On

associe à la fonction de flux f , la fonction tangente $\phi^\natural : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (et son inverse, dénoté par $\phi^{-\natural}$) définie par

$$f'(\phi^\natural(u)) = \frac{f(u) - f(\phi^\natural(u))}{u - \phi^\natural(u)}, \quad u \neq 0, \quad (1.6.26)$$

avec $\phi^\natural(u) \neq u$. Notons que $u \phi^\natural(u) < 0$. On définit $\phi^\natural(0) = 0$. La fonction $\phi^\natural : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ étant inversible, $\phi^\natural \circ \phi^{-\natural} = \phi^{-\natural} \circ \phi^\natural = id$. Par le théorème de fonction implicite, les fonctions ϕ^\natural et $\phi^{-\natural}$ sont aussi lisses que f' .

Lorsque le flux est une fonction concave-convexe, les inégalités entropiques d'Oleinik impliquent

$$\mathcal{S}(u_-) = \begin{cases} [\phi^\natural(u_-), u_-], & u_- \geq 0, \\ [u_-, \phi^\natural(u_-)], & u_- \leq 0. \end{cases} \quad (1.6.27)$$

De l'autre côté, l'ensemble des détente est donné par

$$\mathcal{R}(u_-) = \begin{cases} [u_-, +\infty[, & u_- > 0, \\] - \infty, +\infty[, & u_- = 0, \\] - \infty, u_-], & u_- < 0. \end{cases} \quad (1.6.28)$$

Théorème 1.6.4. (*Problème de Riemann-flux concave-convexe, [46].*) Supposons que la fonction f est concave-convexe (1.6.19) et choisissons $u_- \geq 0$ et u_+ , les données de Riemann. Le problème de Riemann associé à (1.6.18) admet une unique solution classique d'entropie (dans la classe des fonctions lisses par morceaux), composée par des ondes de choc satisfaisant (1.6.22) et des ondes de détente, données comme suit :

- (a.) si $u_+ \geq u_-$, la solution u est une onde de détente reliant de façon monotone et continue u_- à u_+ .
- (b.) si $u_+ \in [\phi^\natural(u_-), u_-]$ la solution est une onde de choc (classique) unique.
- (c.) si $u_+ < \phi^\natural(u_-)$, la solution se compose d'un choc classique joignant $\phi^\natural(u_-)$ suivie d'une détente joignant u_+ . Le choc est une discontinuité de contact à droite, c'est-à-dire la vitesse de choc coïncide avec la vitesse caractéristique à droite :

$$\frac{f(u_-) - f(\phi^\natural(u_-))}{u_- - \phi^\natural(u_-)} = f'(\phi^\natural(u_-)). \quad (1.6.29)$$

On dit que la raréfaction est "attachée" au choc.

Lorsque la fonction flux f admet un nombre fini de points d'inflexion, le problème de Riemann associé à (1.6.18) peut également être résolu explicitement. La construction est basée sur l'enveloppe convexe (quand $u_- < u_+$) ou l'enveloppe

concave (quand $u_- > u_+$) de la fonction f dans l'intervalle limité par les données de Riemann u_- et u_+ .

1.6.6. Solveur de Riemann non classique

Brièvement, nous allons expliquer comment construire des solutions d'entropie non classiques pour le problème de Riemann.

Considérons une onde de choc de la forme générale (1.6.20) reliant deux états u_- et u_+ , où la vitesse $a = \bar{\lambda}(u_-, u_+)$ est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot (1.2.13). Rappelons que l'inégalité de l'entropie (1.6.7) est vrai si et seulement si la dissipation de l'entropie

$$E(u_-, u_+) = -\bar{\lambda}(u_-, u_+) \left(U(u_+) - U(u_-) \right) + \left(F(u_+) - F(u_-) \right)$$

est négative. Sans perte de généralité, nous fixons $u_- > 0$. En outre, nous définissons la fonction de dissipation de l'entropie zéro $\phi_0^\flat : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$E(u, \phi_0^\flat(u)) = 0 \text{ et } \phi_0^\flat(u) \neq u \text{ pour } u \neq 0.$$

Cette fonction est unique si f ne possède qu'un point d'inflexion. Il peut être vérifié, voir [46], que

$$(\phi_0^\flat \circ \phi_0^\flat)(u) = u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

De plus, par exemple pour un flux concave donné, lorsque $u > 0$, la dissipation de l'entropie $E(u, \phi_0^\flat(u))$ est négative si et seulement si $u \in (\phi_0^\flat(u), u)$. Nous nous référons à la Figure (1.11) pour une représentation graphique de la fonction de dissipation de l'entropie zéro pour le flux concave-convexe.

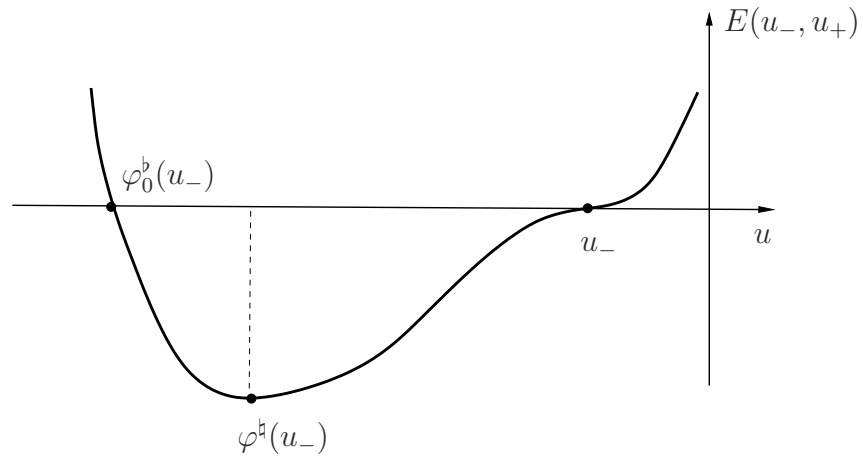


FIGURE 1.11. Fonction dissipation d'entropie pour un flux concave-convexe

Ondes admissibles

Les discontinuités qui satisfont (1.6.7) mais violent les inégalités d'entropie d'Oleinik (de Liu, pour les systèmes), s'appellent des chocs non classiques. Imposer l'inégalité de l'entropie unique (1.6.7), restreint déjà la classe des solutions admissibles. Il s'avère qu'une inégalité de l'entropie permet trois types d'ondes (u_-, u_+) :

1. Chocs compressifs classiques, ayant

$$u_- > 0, \quad \phi^h(u_-) \leq u_+ \leq u_-,$$

qui satisfont les inégalités de Lax (1.6.25).

2. Chocs sous-compressifs non classiques, ayant

$$u_- > 0, \quad \phi_0^b(u_-) \leq u_+ \leq \phi^h(u_-).$$

Toutes les caractéristiques passent par le choc,

$$\min(f'(u_-), f'(u_+)) \geq \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}.$$

La ligne reliant u_- avec u_+ croise le graphe de f . Les chocs sous-compressifs ne proviennent que de certaines limites singulières (dispersives).

3. Ondes de détente. Elles sont des solutions u continues, lipchitziennes, dépendant uniquement de $\xi = x/t$ qui satisfont

$$-\xi u(\xi)_\xi + f(u(\xi))\xi = 0.$$

Une détente se compose de deux états constants séparés par une solution auto-semblable

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{si } x < tf'(u_-), \\ (f')^{-1}(x/t) & \text{si } tf'(u_-) < x < tf'(u_+), \\ u_+ & \text{si } x > tf'(u_+). \end{cases} \quad (1.6.30)$$

Cette construction a lieu si $f'(u_-) < f'(u_+)$ et f' est strictement monotone dans l'intervalle limité par u_- et u_+ .

Si on veut créer une solution pour le problème de Riemann en utilisant uniquement les ondes admissibles décrites ci-dessus, on se rend compte que le problème de Riemann peut admettre une famille à un paramètre de solutions répondant à une unique inégalité d'entropie. Pour une grande classe de régularisations, y compris les régularisations par des termes diffusion-dispersion non linéaire, la sélection d'une solution non classique parmi cette famille est équivalente à prescrire les ondes admissibles selon une relation cinétique.

Définition 1.6.2. Une fonction cinétique $\phi^b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue lipchitzienne, monotone décroissante, satisfaisant

$$\phi_0^b(u) < \phi^b(u) \leq \phi^\sharp(u), \quad u > 0. \quad (1.6.31)$$

La relation cinétique

$$u_+ = \phi^b(u_-)$$

sélectionne un seul choc non classique pour chaque état de gauche u_- donné.

On distingue deux choix particuliers :

- Dans le cas $\phi^b = \phi^\sharp$ la relation cinétique ne sélectionne que des solutions classiques qui satisfont en effet toutes les inégalités d'entropie (entropie convexe).
- Le choix $\phi^b = \phi_0^b$ n'est pas tout à fait permis dans (1.6.31) et correspond à la sélection de chocs dissipation zéro, satisfaisant une égalité d'entropie.

La propriété $(\phi_0^b \circ \phi_0^b)(u) = u$ implique la propriété de contraction

$$|\phi^b(\phi^b(u))| < u, \quad u \neq 0. \quad (1.6.32)$$

Il est possible de montrer que pour tout ϕ^b obtenu à l'aide d'une régularisation, la fonction ϕ^b sera monotone décroissante, Lipchitz et satisfera la condition de contraction ci-dessus. Cette dernière, étant la seule condition non-triviale, toute théorie cinétique devra exploiter de manière essentielle cette propriété. On associe à la fonction ϕ^b une fonction ϕ^\sharp définie par la relation géométrique

$$\frac{f(u) - f(\phi^b(u))}{u - \phi^b(u)} = \frac{f(u) - f(\phi^\sharp(u))}{u - \phi^\sharp(u)}, \quad u \neq 0, \quad \phi^b(u) \leq \phi^\sharp(u) \leq u. \quad (1.6.33)$$

Définition 1.6.3 (Solveur de Riemann non classique). Fixons $u_- > 0$. Le solveur de Riemann non classique associé à u_- et u_+ la solution entropique suivante

- une onde de détente si $u_+ \geq u_-$,
- un choc classique si $u_+ \in [\phi^\sharp(u_-), u_-[$,
- si $u_+ \in]\phi^b(u_-), \phi^\sharp(u_-)[$, un choc non classique $(u_-, \phi^b(u_-))$ suivi par un choc classique $(\phi^b(u_-), u_+)$,
- Si $u_+ \geq \phi^b(u_-)$, un choc non classique $(u_-, \phi^b(u_-))$ suivi par une détente $(\phi^b(u_-), u_+)$.

En conclusion, pour une fonction cinétique donnée ϕ^b , compatible avec une entropie et satisfaisant (1.6.32), le problème de Riemann admet une solution unique satisfaisant la loi de conservation hyperbolique, les données initiales de Riemann, l'unique inégalité de l'entropie et la relation cinétique $u_+ = \phi^b(u_-)$. Notons ici la propriété de dépendance L^1 continue satisfaite par deux solutions

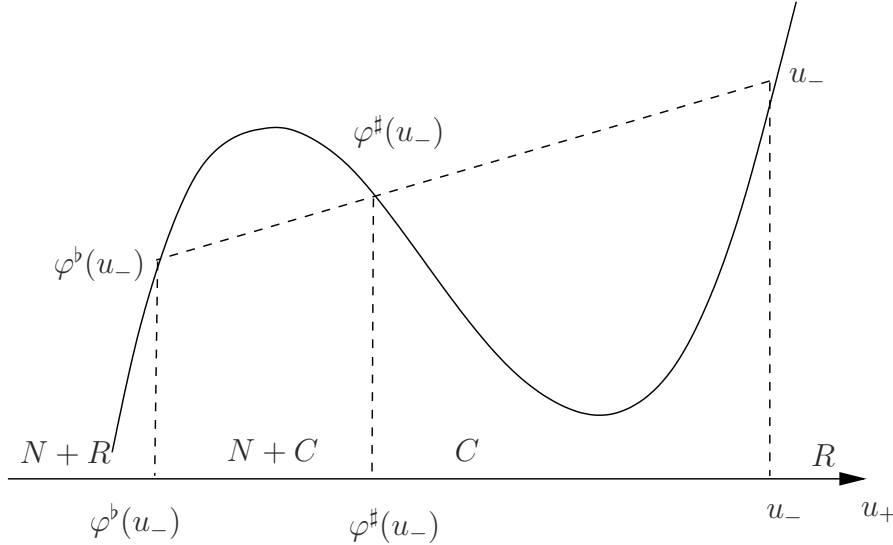


FIGURE 1.12. Solution de Riemann, le solveur non classique.

d'entropie u , v associées à la même fonction cinétique,

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1(K)} \leq C(K, T) \|u(0) - v(0)\|_{L^1(K)}$$

pour tout $t \in [0, T]$ et tous ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$. Cependant, la solution de Riemann introduit des états intermédiaires et donc entraîne une augmentation de la variation totale.

Généralisation aux systèmes. Les solveurs de Riemann non classiques sont aussi connus pour plusieurs systèmes, par exemple pour les équations d'Euler isentropiques en dimensions deux, le système de l'élasticité non linéaire et de transition de phase. Le solveur de Riemann non classique fut construit par Shearer et collaborateurs, voir [69]-[71] (pour l'équation cubique) et LeFloch et Thanh [49]-[50]-[51] et (pour les lois de conservation avec la fonction flux admettant un ou deux points d'inflexion). L'unicité est également connue pour le problème de Riemann (dans la catégorie des fonctions lisses par morceaux) lorsque ce système est strictement hyperbolique. Des résultats partiels sont également disponibles pour les fluides de van der Waals [52]. Nous référons le lecteur à l'article de Hayes et LeFloch [36] pour construire un solveur de Riemann pour les systèmes généraux strictement hyperboliques avec $N \geq 1$ lois de conservation.

1.6.7. Solveur de Riemann avec nucléation

Dans cette section, nous présentons les grandes lignes d'un solveur de Riemann non classiques qui est différent de celui de [46] présenté dans la sous-section précédente. La différence réside dans le fait que le solveur avec nucléation substitue parfois une solution non classique du solveur utilisé dans [46] par une solution

classique. Cette substitution est basée sur un nouvel ingrédient "la condition de nucléation" qui rend la transition de classique à non classique plus exigeante. Fixons $u_- > 0$. Soit ϕ^b une fonction cinétique telle que

$$\phi_0^b(u_-) < \phi^b(u_-) \leq \phi^\sharp(u_-), \quad u_- > 0. \quad (1.6.34)$$

La fonction cinétique s'appliquera pour sélectionner les chocs non classiques. De même que (1.6.33), à partir de la fonction de dissipation zéro ϕ_0^b , on définit $\phi_0^\sharp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons

$$\phi^\sharp(u_-) \leq \phi^\sharp(u_-) \leq \phi_0^\sharp(u_-), \quad u_- > 0. \quad (1.6.35)$$

Malgré qu'on se concentre sur les ondes de choc admissibles et les ondes de détente, le problème de Riemann admet au moins deux solutions différentes pour chaque choix de $u_+ < \phi^\sharp(u_-)$. Une solution est classique : elle se compose soit d'un choc unique (si $u_+ > \phi^\sharp(u_-)$), soit d'un choc suivi d'une détente (si $u_+ < \phi^\sharp(u_-)$). L'autre solution est non classique : elle se compose d'un choc non classiques $(u_-, \phi^b(u_-))$ suivi d'une onde plus rapide qui joint $\phi^b(u_-)$ à u_+ , qui est soit un choc classique $(u_+, > \phi^b(u_-))$, soit une détente $(u_+ < \phi^b(u_-))$. Nous considérons alors une fonction de seuil de nucléation, continue, lipchitzienne, notée $\phi^N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec la propriété

$$\phi^\sharp(u) \leq \phi^N(u) < \phi^\sharp(u), \quad u > 0, \quad (1.6.36)$$

et on définit l'ensemble des chocs non classiques

$$\mathcal{N}(u_-) :=]-\infty, \phi^N(u_-)], \quad u_- > 0.$$

Définition 1.6.4 (Solveur de nucléation). *Considérons une fonction cinétique et le seuil de nucléation satisfaisant respectivement (1.6.34) et (1.6.36). Le solveur de Riemann avec la fonction cinétique et la nucléation est donné par la solution au problème de Riemann avec données u_- , u_+ , satisfaisant l'inégalité de l'entropie (1.6.7), la relation cinétique $u_+ = \phi^b(u_-)$ et le critère de nucléation. Nous l'appelons le solveur de nucléation.*

Fixons $u_- > 0$. Le solveur de nucléation associe à u_- et u_+ la solution entropique suivante

- une onde de détente si $u_+ \geq u_-$,
- un choc classique si $u_+ \in [\phi^N(u_-), u_-[$,
- si $u_+ \in]\phi^b(u_-), \phi^N(u_-)[$, un choc non classique $(u_-, \phi^b(u_-))$ suivi par un choc classique $(\phi^b(u_-), u_+)$,
- Si $u_+ \geq \phi^b(u_-)$, un choc non classique $(u_-, \phi^b(u_-))$ suivi par une détente $(\phi^b(u_-), u_+)$.

Le solveur de nucléation est représenté graphiquement dans la Figure (1.13).

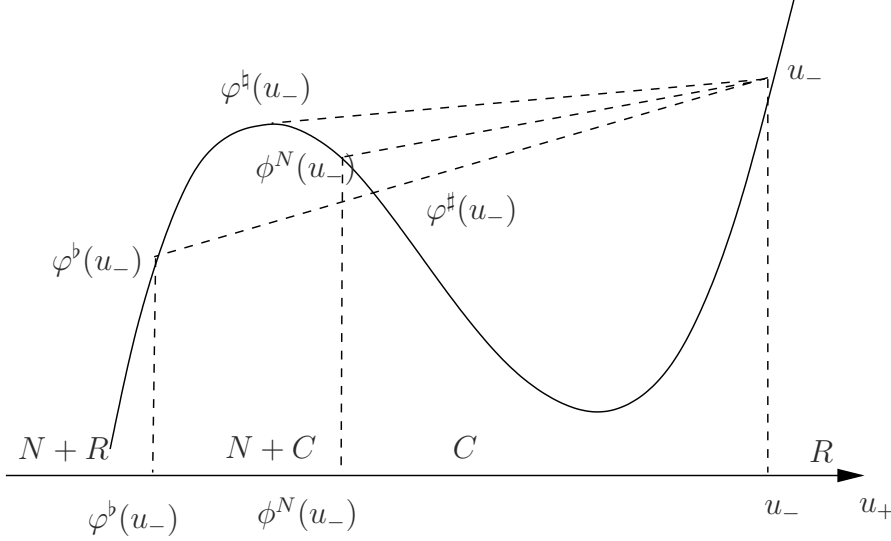


FIGURE 1.13. Solution de Riemann, le solveur de nucléation.

1.6.8. Relations cinétiques associées aux "traveling waves"

Nous citons [47] pour connaître les différents types de formulation de la relation cinétique. Dans cette section, nous expliquons comment dériver efficacement la fonction cinétique par l'analyse des solutions "traveling waves" pour un modèle augmenté donné.

Pour plus de simplicité dans la présentation, nous considérons le modèle augmenté

$$u_t + f(u)_x = \alpha (|u_x|^p u_x)_x + u_{xxx}, \quad (1.6.37)$$

où f est une fonction concave-convexe tandis que $\alpha > 0$ et $p \geq 0$ sont des paramètres. En cherchant des solutions $u(x, t) = w(y)$ qui ne dépendent que de la variable $y = x - at$, nous arrivons à l'équation différentielle ordinaire de deuxième ordre

$$-a(w - u_-) + f(w) - f(u_-) = \alpha |w'|^p w' + w'' \quad (1.6.38)$$

avec conditions aux limites

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} w(y) = u_{\pm}.$$

Ici, u_{\pm} et a sont les états constants satisfaisant la relation de Rankine-Hugoniot. Tous les résultats s'étendent au modèle plus général

$$u_t + f(u)_x = \alpha (b(u, u_x) |u_x|^p u_x)_x + (c_1(u)(c_2(u) u_x)_x)_x, \quad (1.6.39)$$

où les fonctions $b(u, v)$, les $c_1(u)$, les $c_2(u)$ sont continues et positives et $b(u, v)|v|^p v$ est monotone croissante en v . Toutefois, ces extensions introduisent la possibilité d'une dégénérescence proche de l'origine dont on ne parlera pas davantage.

Pour montrer l'existence de la fonction cinétique, nous reformulons (1.6.38) comme un système de premier ordre dans le plan (w, w') . On fixe l'état de gauche et la vitesse, alors les points d'équilibre $u_1 < u_2 < u_3 = u_-$ sont les solutions de

$$-a(w - u_-) + f(w) - f(u_-) = 0,$$

qui admet deux solutions non triviales (à l'exception de u_-). Les points d'équilibre peuvent être des points de selle (deux valeurs propres réelles avec signes opposés) ou des nœuds (deux valeurs propres avec le même signe). Une analyse dans le plan de phase montre qu'il existe des connexions point de selle – nœud de u_- à u_2 (correspondant aux chocs classiques), ainsi que des connexions points de selle - point de selle de u_- à u_1 (correspondant aux chocs non classiques). Nous introduisons l'ensemble de tous les chocs admissible

$$S(u_-) := \{u_+ / \text{il existe une onde "traveling wave" reliant } u_{\pm}\}$$

Le théorème suivant est établi par Bedjaoui et LeFloch dans [6] et montre qu'on peut associer au modèle augmenté, une unique fonction cinétique qui, en outre, est monotone et satisfait toutes les hypothèses nécessaires à la théorie du problème de Riemann.

Théorème 1.6.5 (Existence de la fonction cinétique). *Pour chaque $\alpha > 0$ et $p \geq 0$, considérons le problème (1.6.38) pour le modèle augmenté (1.6.37). Alors, pour chaque valeur fixe de α et p , il existe une fonction cinétique $\phi_{\alpha,p}^b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est localement lipchitzienne, continue, strictement décroissante, et telle que, quand $u > 0$,*

$$S(u_-) = \{\phi_{\alpha,p}^b(u)\} \cup (\phi_{\alpha,p}^\sharp(u), u],$$

$$\phi_0^b(u) < \phi_{\alpha,p}^b(u) \leq \phi^\sharp(u),$$

où $\phi_{\alpha,p}^\sharp$ est la fonction accompagnatrice associée avec $\phi_{\alpha,p}^b$. En outre, pour $0 \leq p \leq 1/3$, il existe un seuil de fonction A_p^\sharp satisfaisant

$$A_p^\sharp : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ continue lipchitzienne, } A_p^\sharp(0) = 0,$$

et telle que

$$\phi^b(u) = \phi^\sharp(u) \text{ si et seulement si } \alpha \geq A_p^\sharp(u),$$

ce qui implique que tous les chocs de force suffisamment petite sont des chocs classiques. En revanche, pour tous les $p > 1/3$, on a

$$\phi^b(u) \neq \phi^\sharp(u) \text{ (} u \neq 0 \text{),}$$

ce qui implique qu'il existe des chocs non classiques de force arbitrairement petite.

Sous les hypothèses du théorème (1.6.5), le comportement des chocs infiniment petits est soigneusement décrite dans [46]-[47]. En plus, lorsque le flux est une fonction cubique on est capable de trouver des formules explicites pour la fonction cinétique, voir par exemple [6]. En revanche, l'existence de chocs non classiques de taille arbitrairement petite est impossible pour des diffusions linéaires, i.e. $p = 0$. C'est le cas le plus important.

Exemple 1.6.5 (Fonctions cinétiques pour le flux cubique). *En plus de montrer l'existence de "traveling waves" (classiques et non classiques), l'objectif principal de l'exemple sera de dériver les fonctions cinétiques correspondantes pour les chocs non classiques. Considérons le modèle diffusif-dispersif spécifique au flux cubique*

$$\partial_t u + \partial_x u^3 = \varepsilon u_{xx} + \delta u_{xxx}, \quad (1.6.40)$$

qui, formellement quand $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$, converge vers la loi de conservation avec un flux cubique

$$\partial_t u + \partial_x u^3 = 0. \quad (1.6.41)$$

Nous sommes intéressés par la limite singulière $\varepsilon \rightarrow 0$ de (1.6.40) lorsque le rapport $\alpha = \varepsilon/\sqrt{\delta}$ est constant. Nous supposons également que le coefficient de dispersion δ est positif. Nous recherchons des solutions de "traveling waves" de (1.6.40) en fonction de

$$y := \alpha \frac{x - \lambda t}{\varepsilon} = \frac{x - \lambda t}{\sqrt{\delta}}.$$

En suivant les mêmes lignes que [46], on trouve qu'une onde "traveling waves" $y \rightarrow u(y)$ doit satisfaire

$$\lambda u_y + (u^3)_y = \alpha u_{yy} + u_{yyy}, \quad (1.6.42)$$

ainsi que les conditions aux limites

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} u(y) = u_{\pm}, \quad (1.6.43)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} u - y(y) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} u_{yy}(y) = 0, \quad (1.6.44)$$

où $u_- \neq u_+$ et λ sont des constantes. Intégrer (1.6.42) implique

$$\lambda = u_-^2 + u_- u_+ + u_+^2,$$

$u_- > 0$ est fixe et λ est le paramètre. Étant donné u_- , il existe une gamme de vitesses,

$$\lambda \in (3u_-^2/4, 3u_-^2),$$

pour lesquelles la ligne passant par le point avec coordonnées (u_-, u_-^3) et pente λ coupe le graphique du flux $f(u) := u^3$ à trois points distincts. Ils existent donc trois équilibres, $u_2 < u_1 < u_0 := u_-$, où u_2 et u_1 sont les deux racines distinctes

du polynôme $u^2 + u_0 u + u_0^2 = \lambda$. Considérons alors une trajectoire $y \rightarrow u(y)$ en partant de u_- au $-\infty$. Nous voulons déterminer quel point, entre u_1 ou u_2 , la trajectoire atteindra au $+\infty$. De toute évidence, la trajectoire est associée à un choc classique si elle atteint u_1 et avec un choc non classique si elle atteint u_2 . En conséquence, l'une sera nommée trajectoire classique et l'autre une trajectoire non classique. En étudiant la nature des points d'équilibre et le comportement local des trajectoires, voir [46], pour le modèle cubique (1.6.40), une formule explicite est dérivée pour la trajectoire non classique.

$$u(y) = \frac{\alpha}{3\sqrt{2}} - \left(u_- - \frac{\alpha}{3\sqrt{2}}\right) \tanh\left(\left(u_- - \frac{\alpha}{3\sqrt{2}}\right) \frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Désignons par $\mathcal{S}_\alpha(u_-)$ l'ensemble de tous les états de droite u_+ pouvant être atteints par une onde "traveling wave" de (1.6.40) avec $\delta > 0$ et $\varepsilon/\sqrt{\delta} = \alpha$ fixé.

Théorème 1.6.6 (Fonction cinétique et ensemble des chocs pour le flux cubique.). *La fonction cinétique associée au modèle diffusif-dispersif linéaire (1.6.40) est*

$$\phi_\alpha^b(u_-) = \begin{cases} -u_- - \tilde{\alpha}/2, & u_- \leq -\tilde{\alpha}, \\ -u_-/2, & |u_-| \leq \tilde{\alpha}, \\ -u_- + \tilde{\alpha}/2, & u_- \geq \tilde{\alpha}, \end{cases} \quad (1.6.45)$$

avec $\tilde{\alpha} := 2\alpha\sqrt{2}/3$, tandis que l'ensemble des chocs correspondant est

$$\mathcal{S}_\alpha(u_-) = \begin{cases} (u_-, \tilde{\alpha}/2] \cup \{-u_- - \tilde{\alpha}/2\}, & u_- \leq -\tilde{\alpha}, \\ [-u_-/2, u_-), & -\tilde{\alpha} \leq u_- \leq \tilde{\alpha}, \\ \{-u_- + \tilde{\alpha}/2\} \cup [-\tilde{\alpha}/2, u_-), & u_- \geq \tilde{\alpha}. \end{cases} \quad (1.6.46)$$

La fonction cinétique (1.6.46) est monotone décroissante et se situe entre les fonctions $\phi^\sharp(u) := -u/2$ et $\phi_0^b(u) := -u$. Dépendant de u_- , l'ensemble de choc peut être soit un intervalle, soit l'union d'un point et d'un intervalle, Figure (1.14).

Nous limitons notre attention à la paire entropie-flux d'entropie

$$U(u) = u^2/2, \quad F(u) = 3u^4/4,$$

pour laquelle, suivant [46], il est possible de calculer le rapport critique de diffusion-dispersion

$$A(u_0, u_2) = \frac{3}{\sqrt{2}}(u_0 + u_2),$$

avec $u_0 \geq 0$ et $u_2 \in (-u_0, -u_0/2)$ et pour $u_0 \leq 0$ et $u_2 \in (-u_0/2, -u_0)$. Une trajectoire non classique reliant u_0 à u_2 existe si et seulement si le paramètre $\alpha = \varepsilon/\sqrt{\delta}$ est égal à $A(u_0, u_2)$. La fonction A augmente de façon monotone en u_2

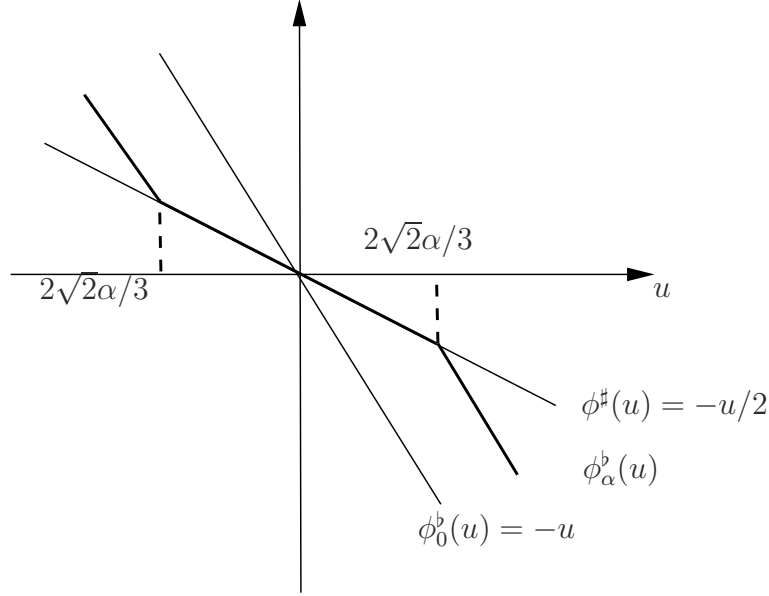


FIGURE 1.14. Fonction cinétique pour le flux cubique. Pour chaque valeur de α on observe que ϕ_α^b est différente, sauf proche de l'origine où $\phi_\alpha^b(u) = \phi^\sharp$ et nous n'avons que des solutions classiques.

($u_0 > 0$) de la valeur 0 au seuil du taux de diffusion-dispersion

$$A^\sharp(u_0) = \frac{3u_0}{2\sqrt{2}}.$$

Pour tout état fixe $u_0 > 0$, il existe une trajectoire non classique sortant de u_0 si et seulement si α est inférieur à $A^\sharp(u_0)$.

Exemple 1.6.6 (Chocs non classiques en élastodynamique,[36]). Revenons au modèle décrit dans l'exemple 1.6.2. Considérons alors le système d'élastodynamique

$$\partial_t v - \partial_x \sigma(w) = 0, \quad (1.6.47)$$

$$\partial_t w - \partial_x v = 0,$$

où les fonctions à valeurs réelles v et w représentent respectivement la déformation de la vitesse et du gradient. On suppose que la loi sur la contrainte de la déformation a la forme

$$\sigma(w) = w^3 + m^2 w, \quad m > 0. \quad (1.6.48)$$

Les données de Riemann sont telles que

$$v(x, 0), w(x, 0) = \begin{cases} v_l, w_l & \text{si } x \leq 0, \\ v_r, w_r & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (1.6.49)$$

pour des constantes v_l, w_l, v_r, w_r . Le système est strictement hyperbolique avec des valeurs propres $\lambda_1(v, w) = -c(w) < 0 < \lambda_2(v, w) = c(w)$, où la vitesse du son est $c(w) = \sqrt{3w^2 + m^2}$. Les vecteurs propres de droite peuvent être choisis comme $r_i(v, w) = (\pm c(w), 1)$ pour $i = 1, 2$.

Nous considérons alors les courbes d'ondes pour ce système. Le locus de Hugoniot $\mathcal{H}_1(v_0, w_0)$ se compose de tous les états (v_1, w_1) connectés à (v_0, w_0) à gauche par une discontinuité avec une vitesse $s < 0$. De même, $\mathcal{H}_2(v_0, w_0)$ correspond aux discontinuités avec vitesse $s > 0$. La condition de Rankine-Hugoniot impose

$$-s = \frac{v - v_0}{w - w_0} = \frac{\sigma(w) - \sigma(w_0)}{v - v_0}.$$

On obtient

$$\mathcal{H}_1(v_0, w_0) = \{v \in \mathbb{R} | v - v_0 = \bar{c}(w_0; w)(w - w_0)\},$$

$$\mathcal{H}_2(v_0, w_0) = \{v \in \mathbb{R} | v - v_0 = -\bar{c}(w_0; w)(w - w_0)\},$$

avec $\bar{c}(w_0; w) = \sqrt{w_0^2 + w_0 w + w^2 + m^2}$. De plus, les ondes de détente sont basées sur les courbes intégrales des champs vectoriels r_j :

$$\mathcal{O}_1(v_0, w_0) = \left\{v \in \mathbb{R} | v - v_0 = \int_{w_0}^w c(z) dz\right\},$$

$$\mathcal{O}_2(v_0, w_0) = \left\{v \in \mathbb{R} | v - v_0 = -\int_{w_0}^w c(z) dz\right\}.$$

Le système (1.6.47) n'est pas vraiment non linéaire puisque $\nabla \lambda_1(w) r_1(w) = -3w/c(w)$ et $\nabla \lambda_2(w) r_2(w) = 3w/c(w)$, qui s'annulent sur $\mathcal{M} = \{(v, w) | w = 0\}$. Loin de la ligne $w = 0$, le système possède deux champs vraiment non linéaires.

La construction de Liu d'une solution unique. Nous résumons brièvement la construction de Liu pour le système (1.6.47), pour lequel une revue plus détaillée, se trouve dans l'article de Hayes et Lefloch [36]. Les courbes d'onde sont facilement définies localement. Ces courbes sont $\mathcal{H}_1(v_0, w_0)$, $\mathcal{O}_1(v_0, w_0)$, $\mathcal{H}_2(v_0, w_0)$ et $\mathcal{O}_2(v_0, w_0)$ pour les valeurs $w > w_0$, $w < w_0$, $w < w_0$ et $w > w_0$, respectivement. Nous nous intéressons maintenant à ces courbes d'onde qui traversent la ligne $w = 0$. Pour $0 < w < w_0$, nous avons $\nabla \lambda_i \cdot r_i < 0$, de sorte que tous les points (v, w) dans cette région, situés sur $\mathcal{O}_1(v_0, w_0)$, peuvent être obtenus par une seule onde de détente. Cette construction change pour $w < 0$: Selon le critère de Liu, pour atteindre un point (v, w) de (v_0, w_0) , ayant $-2w_0 < w < 0$, la solution procède selon $\mathcal{O}_1(v_0, w_0)$ jusqu'à atteindre (v, w) , à partir duquel, elle saute de $\mathcal{H}_1(v_0, w_0)$ à (v, w) . En désignant cette courbe composite

$$\mathcal{K}_1(v_0, w_0) = \left\{ (v, w) | \text{il existe } (v_*, w_*) \in \mathcal{O}_1(v_0, w_0), \quad 0 < w_* < w_0, \right. \\ \left. \text{tel que } w = -2w_* \text{ et } (v, w) \in \mathcal{H}_1(v_*, w_*) \right\},$$

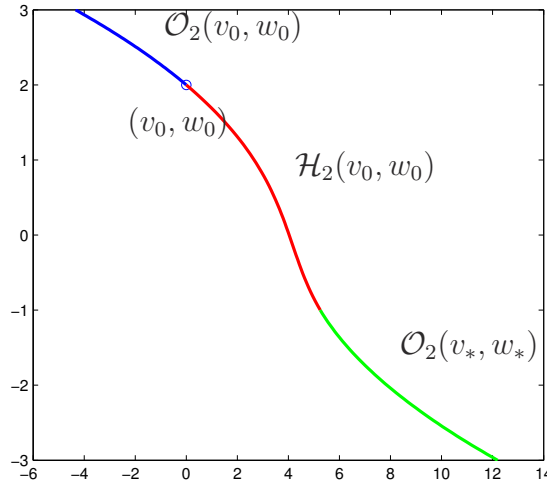


FIGURE 1.15. Courbe classique pour la 2^{ème}–famille d’onde.

nous résumons cette construction dans le lemme suivant.

Lemme 1.6.2. *La courbe classique de la 1^{ère}–famille d’onde d’un point (v_0, w_0) , $w_0 > 0$, est l’union de quatre pièces :*

$$\mathcal{W}_1^c(v_0, w_0) = \begin{cases} \mathcal{H}_1(v_0, w_0) & \text{pour } w > w_0, \\ \mathcal{O}_1(v_0, w_0) & \text{pour } 0 \leq w \leq w_0, \\ \mathcal{K}_1(v_0, w_0) & \text{pour } -2w_0 \leq w \leq 0, \\ \mathcal{H}_1(v_0, w_0) & \text{pour } w < -2w_0. \end{cases}$$

Il s’agit d’une courbe monotone croissante C^2 par morceaux, allant de $(v, w) = (-\infty, -\infty)$ à $(v, w) = (+\infty, +\infty)$.

La construction de la courbe de la 2^{ème}–famille d’onde est similaire et nous résumons ses propriétés comme suit.

Lemme 1.6.3. *La courbe classique de 2^{ème}–ondes de (v_0, w_0) , avec $w_0 > 0$, est l’union de trois pièces, Figure 1.15 :*

$$\mathcal{W}_2^c(v_0, w_0) = \begin{cases} \mathcal{O}_2(v_0, w_0) & \text{pour } w > w_0, \\ \mathcal{H}_2(v_0, w_0) & \text{pour } -w_0/2 \leq w \leq w_0, \\ \mathcal{O}_2(v_*, w_*) & \text{pour } w < -w_0/2, \end{cases}$$

où $(v_*, w_*) \in \mathcal{H}_2(v_0, w_0)$ et $w_* = -w_0/2$. Il s’agit d’une courbe décroissante monotone C^2 par morceaux, allant de $(v, w) = (+\infty, -\infty)$ à $(v, w) = (-\infty, +\infty)$. Une solution unique existe pour les données arbitraires de Riemann. On peut vérifier que cette solution dépend continuellement des états initiaux (v_0, w_0) , voir [36].

Famille à deux paramètres de solutions d'entropie non classiques. La construction d'une famille de solutions à deux paramètres est basée sur une paire d'entropie convexe spécifique, que nous considérons comme étant

$$U(v, w) = \frac{v^2}{2} + \frac{w^4}{4} + m^2 \frac{w^2}{2}, \quad F(v, w) = -v\sigma(w).$$

Ce choix est basé sur la régularisation dont la motivation physique a été étudiée en [36]. Les relations de Rankine-Hugoniot pour (1.6.47) et un bref calcul conduisent à la formule suivante pour la dissipation d'entropie :

$$E((v_-, w_-); (v_+, w_+)) = -\frac{1}{2}\bar{w}[w]^2[v]$$

avec $[w] = w_+ - w_-$ et $\bar{w} = (w_+ + w_-)/2$. L'inégalité de l'entropie se réduit donc à $\bar{w}[v] \geq 0$ pour $[w] \neq 0$. Nous présentons maintenant des solutions contenant des chocs non classiques par le théorème suivant issue de [36].

Théorème 1.6.7 ([36]). Les solutions à (1.6.47) satisfaisant une inégalité d'entropie unique forment une famille à un paramètre dans chacun des deux champs caractéristiques. Les vitesses s_1 et s_2 des chocs non classiques dans les familles à 1- et 2- ondes, respectivement, peuvent être utilisées comme paramètres. Étant donné un état de gauche (v_0, w_0) et notant l'état de gauche du choc non classique par (v_-, w_-) , ils existent des solutions non classiques dans la 1^{ère}-famille pour s_1 satisfaisant

$$\max \left\{ -\sqrt{w_0^2 + w_0 w_- + w_-^2 + m^2}, -\sqrt{3w_-^2 + m^2} \right\} \leq s_1 \leq -\sqrt{w_-^2 + m^2},$$

et dans la 2^{ème}-famille pour s_2 satisfaisant

$$\sqrt{(3/4)w_-^2 + m^2} \leq s_2 \leq \sqrt{w_-^2 + m^2}.$$

Solution d'entropie non classique unique. Pour une solution joignant $u_0 = (v_0, w_0)$ à $u_1 = (v_1, w_1)$, nous étiquetons les états successifs, selon la vitesse d'onde croissante, par $u_0, u_{i_1} = (v_{i_1}, w_{i_1}), u_m = (v_m, w_m), u_{i_2} = (v_{i_2}, w_{i_2})$ et u_1 . Les 1-chocs non classiques connectent toujours u_{i_1} à une u_m , alors que les 2-chocs non classiques rejoignent u_m à une u_{i_2} . Selon u_0 et u_1 , un choc non classique peut apparaître dans \mathcal{H}_1 ou \mathcal{H}_2 , ou les deux. Pour sélectionner l'unique choc non classique, nous utiliserons une relation cinétique, comme dans le théorème suivant.

Théorème 1.6.8. Notons par $I = [m, \infty)$ la plage de vitesses positives de chocs, et considérons une fonction cinétique $\phi(s)$ ayant les propriétés suivantes :

$$\frac{d\phi}{ds} < 0 \quad \text{pour } s \in I, \quad (1.6.50)$$

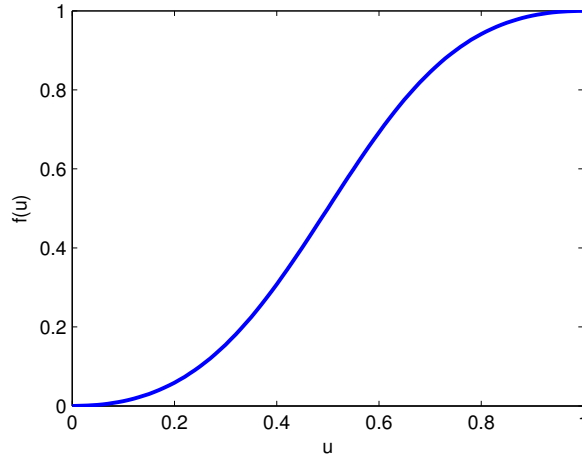


FIGURE 1.16. Flux de Buckley-Leverett, $a = 1$, $u \in [0, 1]$

$$\phi(s) \leq 0 \quad \text{pour tout } s \in I, \quad (1.6.51)$$

$$\phi(s) \geq -\frac{3}{4}s(s^2 - m^2)^2 \quad \text{pour } s \in I. \quad (1.6.52)$$

Alors, la relation cinétique $E(w_m; w_{i_2}) = \phi(s)$ sélectionne une valeur unique de l'état de droit $w_+ = g(w_-)$, parmi les chocs non classiques dans $\mathcal{H}_2(v_-, w_-)$.

Afin de sélectionner un choc unique non classique dans la 1^{ère}-famille des ondes, on utilise un argument de symétrie du système (1.6.47); voir dans [36] où on y pourra trouver la preuve du théorème, la construction de la fonction cinétique, les courbes non classiques et les résultats de convergence.

Exemple 1.6.7 (Fonction-flux de type Buckley-Leverett). L'équation de Buckley-Leverett est

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon \theta u_{xx} - \varepsilon^2 (1 - \theta) u_{xxx}, \quad (1.6.53)$$

où

$$f(u) = \frac{k_1(u)}{k_1(u) + k_2(1 - u)}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

et $0 \leq \theta \leq 1$. Les fonctions $k_1(u)$, $k_2(u)$ sont telles que

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + a(1 - u)^2},$$

avec a est une constante positive. La fonction de flux f n'est pas convexe dans l'intervalle $[0, 1]$.

$$f(0) = 0 = f'(0); \quad f(1) = 1; f'(1) = 0; \quad f''(0) > 0; f''(1) < 0.$$

Le graphique de cette fonction f pour le paramètre $a = 1$ est représenté sur la Figure (1.16), f est C^2 , monotone croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ et elle a un

seul point d'inflexion qu'on note u_I . Puisque la solution classique du problème de Riemann est monotone, pour des données initiales dans l'intervalle $[0, 1]$, la solution est également dans l'intervalle $[0, 1]$, mais pour des solutions non classiques, $u(x, t)$ peut être non monotone en x , en particulier lorsque la solution implique une combinaison de chocs sous-compressifs et compressifs.

Hayes et Lefloch étudient numériquement des hypothèses, voir [46], afin de résoudre le problème de Riemann pour toutes les données de Riemann $u_-, u_+ \in [0, 1]$. Ils illustrent des résultats numériques des solutions au problème de Riemann pour l'équation de Buckley-Leverett avec dispersion seulement. Ils ont également démontré que les chocs sous-compressifs étaient sensibles au rapport de diffusion-dispersion, représenté ici par θ , ainsi qu'au rapport de la diffusion, à la taille du maillage, ε/h , et à la force du choc.

Exemple 1.6.8 (Solutions de type "Splitting/Merging"). Dans cet exemple, nous démontrons la scission ("splitting") d'un choc classique en un choc classique C^\uparrow et un choc non classique N_\pm^\downarrow , puis la fusion ("merging") de cette structure de nouveau dans un choc classique C_\pm^\downarrow . Considérons le cas d'une fonction flux concave-convexe dans la Figure 1.17 et soit les données initiales de la forme suivante

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x \leq 0, \\ u_1, & 0 \leq x \leq a, \\ u_2, & a \leq x \leq b, \\ u_r, & x \geq b. \end{cases} \quad (1.6.54)$$

Nous supposons $u_l > 0$, et les inégalités suivantes :

$$\phi^b(u_l) < u_2 < \phi^N(u_l) < u_1 < \phi^\sharp(u_l) < u_r < \phi^N(\phi^b(u_l)) < u_l,$$

où ϕ^N est le seuil de nucléation. La solution du problème de Riemann avec les données u_1, u_2 est une onde de détente, qui interagira rapidement (si a est petite) avec le choc classique joignant u_l à u_1 . Pour simplifier cette interaction, nous remplaçons (comme dans le schéma de "front tracking") la détente par un front de choc-détente de u_1 à u_2 . Avec cette observation, la solution du problème à valeur initiale est illustrée dans la Figure 1.17, en supposant que a est petit par rapport à $b - a$. La première interaction entraîne une paire de chocs, un choc non classique N_\pm^\downarrow et un choc classique C^\uparrow . Par la suite, un choc approche de la droite et ralentit le C^\uparrow à une vitesse qui est en dessous de celle du choc non classique N_\pm^\downarrow à gauche, résultant à la fin par la fusion ("merging") finale en un choc classique C_\pm^\downarrow .

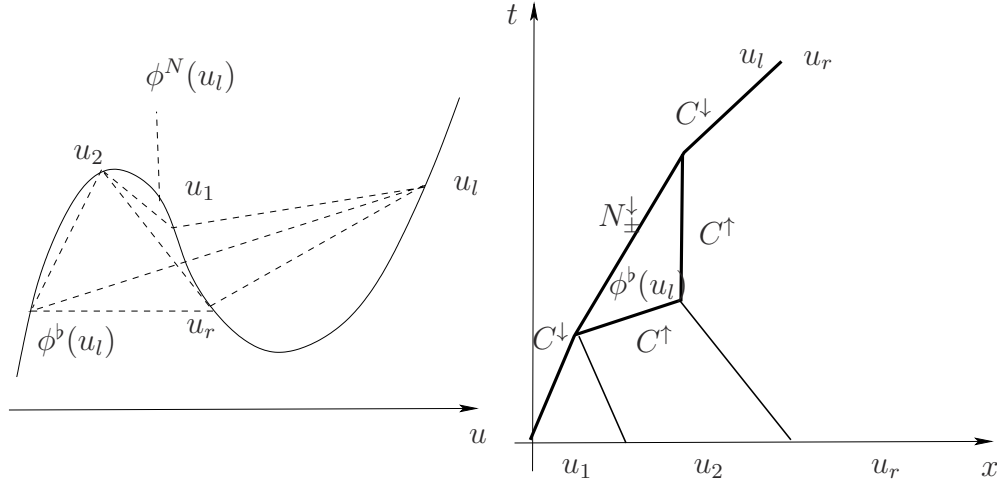


FIGURE 1.17. Solutions de "Splitting/Merging" pour le flux concave-convexe

1.6.9. Quelques remarques

En considérant le solveur non classique de Riemann basé sur une fonction cinétique ϕ^b , en suivant la méthode de suivi de front [24], nous construisons une approximation constante par morceaux $u^h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Or, plusieurs difficultés doivent être surmontées afin de conclure que ces approximations convergent. Tout d'abord, il faut montrer que le nombre total de fronts d'ondes ainsi que le nombre total de points d'interaction reste fini pour tout temps fixé. Pour cela il faut contrôler la variation totale $TV(u^h(\cdot, t))$ qui peut augmenter durant les interactions. Nous exigeons que $\phi^b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne continue, monotone décroissante, et que

$$|\phi^b \circ \phi^b(u)| \leq K|u|, \quad u \neq 0 \quad (1.6.55)$$

est une **contraction stricte** pour $K \in [0, 1[$. En suivant, Baiti, LeFloch et Piccoli [63] et Laforest et LeFloch [42], nous définissons la force généralisée, par

$$\sigma(u_-, u_+) := |\psi(u_-) - \psi(u_+)|, \quad \psi(u) := \begin{cases} u & \text{pour } u > 0, \\ \phi_0^b(u) & \text{pour } u < 0. \end{cases}$$

Cette définition présente plusieurs avantages. Tout d'abord, il compare les états avec le même signe. Deuxièmement, il est "équivalent" à la définition standard de la force, au sens où

$$\underline{C}|u_- - u_+| \leq \sigma(u_-, u_+) \leq \overline{C}|u_- - u_+|.$$

En troisième lieu, il bénéficie d'une propriété de continuité quand u_+ traverse $\phi^\sharp(u_-)$, c'est à dire pendant la transition d'un seul choc à un modèle de deux

ondes :

$$\begin{aligned}
\sigma(u_-, \phi^\sharp(u_-)) &= |u_- - \phi_0^\flat \circ \phi^\sharp(u_-)| \\
&= |u_- - \phi_0^\flat \circ \phi^\flat(u_-)| + |\phi_0^\flat \circ \phi^\flat(u_-) - \phi_0^\flat \circ \phi^\sharp(u_-)| \\
&= \sigma(u_-, \phi^\flat(u_-)) + \sigma(\phi^\flat(u_-), \phi^\sharp(u_-)).
\end{aligned}$$

Nous définissons ensuite la fonctionnelle de la variation totale généralisée, pour une fonction $u = u(\cdot, t)$ constante par morceaux, faite des fronts de chocs ou de detentes (u_-^α, u_+^α) , par

$$V(u(t)) := \sum_{\alpha} \sigma(u_-^\alpha, u_+^\alpha),$$

qui est équivalent à la variation totale standard

$$TV(u(t)) := \sum_{\alpha} |u_-^\alpha - u_+^\alpha|.$$

La notion d'équivalence de normes est bien connue.

On trouve dans [23] et [46] la classification de tous les interactions d'ondes possibles, environ 20 cas distingués. Certains cas donnent lieu à une augmentation de la variation totale, ce qui n'est même pas proportionnelle à la force (plus petite) des ondes. Par exemple, un choc classique (décroissant) peut interagir avec une détente (décroissante) venant du côté de l'état droit et transformer en un choc non classiques (décroissant) suivi d'un choc classique (croissant). Ici, le profil d'onde sortant est non-monotone et la variation totale standard $TV(u^h(t))$ augmente. Cependant, $V(u^h(t))$ diminue. Une autre interaction possible est fournie par un choc non classique (décroissant) qui frappe un choc classique (croissant) et se transforme en un choc classique (décroissant). Dans ce cas, une décroissance significative de la variation totale se produit, et la variation totale standard $TV(u^h(t))$ et le généralisé $V(u^h(t))$ diminuent.

Laforest et LeFloch ont proposé une définition plus intuitive et plus naturelle pour évaluer la force des ondes comparativement à celle décrite dans [65]. Cette définition permet d'exploiter explicitement la propriété de contraction(1.6.55), ce qui n'était que présent implicitement dans les descriptions précédentes. A l'aide de cette nouvelle définition, les auteurs ont calculé la fonctionnelle de Glimm pour les solutions non classiques lorsque la fonction de flux $f(u)$ est de type concave-convexe. L'inspection de tous les cas traités permet d'affirmer que la fonctionnelle de Glimm est décroissante sauf pour quatre cas. Toutefois, ils démontrent que celle-ci est décroissante dans le cas de solutions de type "splitting-merging" [42]. Nous avons les estimations suivantes.

Théorème 1.6.9 (Existence de solutions non classiques entropiques [65], [42]).

Considérons une fonction cinétique compatible avec une entropie convexe U satisfaisant la propriété de contraction stricte (1.6.55). Pour toute donnée initiale $u_0 \in VB(R)$, les approximations $u^h = u^h(x, t)$, construites à partir du solveur non classique de Riemann satisfont

$$\| u^h(t) \|_{L^\infty(R)} \lesssim \| u_0 \|_{L^\infty(R)},$$

$$TV(u^h(t)) \lesssim TV(u_0),$$

$$\| u^h(t) - u^h(s) \|_{L^1(R)} \lesssim |t - s|,$$

et convergent en L^1 vers une solution faible

$$u = u(x, t) \in \text{Lip}([0, +\infty), L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, +\infty), VB(\mathbb{R}))$$

du problème à valeur initiale, qui satisfait l'inégalité de l'entropie

$$U(u)_t + F(u)_x \leq 0.$$

L'unicité des solutions entropiques non-classiques est établi dans Baiti, LeFloch et Piccoli [64] au sein de la classe des fonctions à variation faible.

Chapitre 2

DIFFUSIVE-DISPERSIVE TRAVELING WAVES AND KINETIC RELATIONS. GENERIC FLUX WITH MULTIPLE INFLECTION POINTS

2.1. INTRODUCTION

Our purpose in this paper is the study of nonclassical entropy solutions to the following initial-value problem associated with a conservation law in one space variable :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \tag{2.1.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{2.1.2}$$

Here, the initial data $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is an integrable function with bounded total variation, while the flux-function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth and non-convex function which may have multiple inflection points.

The standard approach to defining weak solutions to (2.1.1)-(2.1.2) is by adding a vanishing viscosity to the right-hand side of (2.1.1). However, physically realistic regularizations may involve both diffusive and dispersive terms such as (with initial and boundary conditions that converge appropriately)

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon \alpha u_{xx}^\epsilon + \epsilon^2 u_{xxx}^\epsilon, \tag{2.1.3}$$

where $\alpha > 0$ is a fixed constant and $\epsilon \rightarrow 0$. In the limit, solutions converge to nonclassical entropy solutions whose selection requires not only an entropy inequality (see below) but also a kinetic relation imposed on undercompressive discontinuities [39, 46]. LeFloch and collaborators [46] have established a general theory based on prescribing a kinetic function encoding admissibility as limits of general regularizations and have shown existence of nonclassical weak solutions for (2.1.1)-(2.1.2).

The main assumption made in [46] is that the flux-function admits a single inflection point (or more generally, as far as hyperbolic systems are concerned, Lax's genuine nonlinearity condition is assumed to be lost on each wave curve at one point at most). Our purpose in the present paper is to treat flux-functions with an arbitrary number of inflection points. We concentrate our attention on scalar conservation laws and on the construction of nonclassical traveling waves, assuming that a similar but more involved analysis could be adapted to systems.

The existence of traveling waves for the linear diffusive-dispersive regularization (2.1.3) was treated in [39] for the cubic flux and [7] for general flux-functions with one inflection point. Next, [8] generalized the analysis to singular regularization. To these regularizations, a kinetic function characterizing the family of all traveling waves was introduced and its asymptotic properties were studied extensively.

The first work on a flux-function with two inflection points was done by LeFloch and Thanh [49] for the so-called van der Waals model which describes a fluid undergoing phase transition. For more recent work, see [75]. However, these papers did not link the regularized limits to the construction of kinetic functions, which we do in the present paper. In the existing literature, Bedjaoui et al. [59] is the only paper which analyzes nonclassical traveling waves for flux-functions with two inflection points and, specifically, for the system of isentropic gas dynamics for a Van der Waals fluid. Therein, nonlinear diffusion-dispersion regularizations were also thoroughly studied. Generally speaking, nonlinear regularizations only complicate the analysis by generating arbitrarily small nonclassical shocks and by requiring a more careful analysis of the existence of traveling waves.

In the present paper, we analyze linear diffusion-dispersion regularizations for arbitrary flux-functions f and we describe the family of classical and nonclassical traveling waves and introduce the corresponding family of kinetic functions. The number of kinetic functions is roughly speaking the number of inflection points of the flux. and the main conclusion is that, for any left-hand state u_- and speed a , there exists an infinite sequence of the values of the diffusion-dispersion ratios $\{\alpha^{(k)}\}_k$ for which nonclassical shocks exist. In particular, we prove there exists a unique monotone nonclassical wave associated with $\alpha^{(0)}$. while for the ratio $\alpha^{(k)}$ the corresponding traveling wave enjoys k oscillations.

An outline of this paper is as follows. In Section 2.2, we briefly review some elements of the theory of conservation laws and presents key properties of the entropy dissipation. Section 2.3 considers entropy solutions realized as limits of vanishing diffusion-dispersion regularizations and the problem under consideration is reduced to the study of trajectories in a phase space. Our main results are

presented in Section 2.5 : building on observations made in the previous sections, we prove that nonclassical traveling waves, connecting a left-hand state equilibrium to a saddle equilibrium, arise for a countable set of critical values of the diffusion-dispersion ratio. Section 2.5 presents some numerical results illustrating our theoretical conclusions, and in Section 2.6 we conclude this paper with some remarks.

2.2. GENERIC FLUX AND ENTROPY DISSIPATION

2.2.1. Background material

Recall that the conservation law (2.1.1) may be endowed with a smooth function $(U, F) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ called an entropy-entropy flux pair and that any solution to (2.1.1) satisfies the additional conservation law

$$\partial_t U(u) + \partial_x F(u) \leq 0. \quad (2.2.1)$$

The pair (U, F) satisfies $F'(u) = U'(u)f'(u)$ for $u \in \mathbb{R}$ and that U is strictly convex. If a specific regularization is provided, there is generally only one admissible entropy for which diffusive-dispersive limit satisfy (2.2.1). For instance, for the linear regularization (2.1.3) of main interest in the present paper, the entropy is precisely $U(u) = u^2$.

Previous work has shown that the class of solutions should include solutions that are not continuously differentiable and, in fact, are discontinuous. For initial data $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \text{BV}(\mathbb{R})$, weak solutions $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}))$ of the Cauchy problem (2.1.1) are functions u which that satisfy

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_0 dx = 0, \text{ for all } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+). \quad (2.2.2)$$

Weak solutions of the Cauchy problem (2.1.1)-(2.1.2) are generally non-unique. To single out the solution to interest, we restrict attention to weak solutions satisfying the inequality

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (U(u) \partial_t \phi + F(u) \partial_x \phi) dx dt \geq 0, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), \quad \phi \geq 0. \quad (2.2.3)$$

In this context, the simplest initial value problem is obtained when the initial data consists of two constant states denoted by u_\pm , i.e.

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_- & \text{for } x < 0, \\ u_+ & \text{for } x > 0. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

The Riemann problem consists of finding a weak solution satisfying this initial condition together with the entropy inequality above. When undercompressive nonclassical shocks are allowed, a further admissibility condition, the kinetic function, must also be supplemented. As we will see later, the presence of undercompressive nonclassical shocks implies the non-uniqueness of solutions, but well-posedness can be maintained by introducing a kinetic function which identifies admissible function families of nonclassical shocks. We refer to [46] for the details and, in the rest of this paper, we focus on the issue of constructing (classical and nonclassical) traveling wave solutions to (2.1.3) with, as mentioned earlier, the choice of entropy $U(u) = u^2$.

If u is a discontinuity traveling at some speed a , written explicitly as

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_- & \text{for } x < at, \\ u_+ & \text{for } x > at, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

then if it is a weak solution to (2.1.1)-(2.1.2), the speed must be

$$a = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}.$$

The speed above $a = a(u_-, u_+)$ is called the Rankine-Hugoniot shock speed. When such a weak solution is also entropy-admissible, in the sense of (2.2.3), it is called a shock wave. If we have a Riemann problem for (2.1.1)-(2.1.2) with $u_- < u_+$ (resp. $u_+ < u_-$) such that f is convex (resp. concave) over the interval $[u_-, u_+]$ (resp. $[u_+, u_-]$), then the only weak entropy-admissible solution is continuous and pointwise C^1 and given by

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{for } x/t \leq f'(u_-), \\ (f')^{-1}(\frac{x}{t}) & \text{for } f'(u_-) < x/t < f'(u_+), \\ u_+ & \text{for } f'(u_+) \leq x/t. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Such a solution is called a rarefaction wave.

2.2.2. The class of flux-functions of interest

We begin with a definition.

Définition 2.2.1. *A function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called a **generic flux** if it is smooth and admits n non-degenerate inflection points $I_n < I_{n-1} < \dots < I_1$, that is, such that*

$$f''(I_k) = 0, \quad f'''(I_k) \neq 0 \quad \text{for } k=1, \dots, n.$$

Moreover, we assume that for n even

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u) = +\infty, \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} f'(u) = \pm\infty. \quad (2.2.7)$$

while for n odd,

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u) = \pm\infty, \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} f'(u) = +\infty. \quad (2.2.8)$$

We observe that such a flux function is generic in the sense of Sard's theorem, see in [57], so our terminology is therefore quite appropriate. Without loss of generality, we will be considering only Riemann problems with $I_1 < u_-$ and $u_+ < u_-$, as was done in [46]. Almost identical statements exists when $u_- < u_+$ and $u_- < I_n$, but they will be omitted since the purpose of this research is to explain how LeFloch's notion of kinetic functions can be extended to generic fluxes.

Some notation will be required later on and we introduce the intervals of convexity/concavity $\mathcal{I}_i = [I_i, I_{i-1}]$ with the understanding that $I_0 = +\infty$ and $I_{n+1} = -\infty$.

2.2.3. Properties of the entropy dissipation

We now discuss some properties of the entropy for generic flux. First of all, it is well-known that for weak solutions (2.2.2) formed by piecewise C^1 functions with isolated discontinuities along C^1 curves, the weak entropy condition (2.2.3) is satisfied if and only if a pointwise condition is satisfied along the curve. More specifically, if the isolated discontinuity traveling at speed a is characterized locally by

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & \text{for } x < x_0 + at, \\ u_+ & \text{for } x_0 + at \leq x, \end{cases} \quad (2.2.9)$$

then (2.2.3) holds for all positive test functions if and only if the entropy dissipation

$$E(u_-, u_+) = -a(u_-, u_+) \left(U(u_+) - U(u_-) \right) + \left(F(u_+) - F(u_-) \right) \quad (2.2.10)$$

is negative at every point along the discontinuity. The next lemma presents a form of the entropy dissipation that is more amenable to analysis.

Lemme 2.2.1. *The entropy dissipation (2.2.10) is equivalent to*

$$E(u_-, u_+) = - \int_{u_-}^{u_+} U''(v)(v - u_-) \left(a(v, u_-) - a(u_-, u_+) \right) dv. \quad (2.2.11)$$

DÉMONSTRATION. Following the proof in [46, Theorem 3.1], we begin by rewriting the entropy dissipation in an intermediate integral form by exploiting the relation $F' = U'f'$,

$$\begin{aligned} E(u_-, u_+) &= -a(u_-, u_+)(U(u_+) - U(u_-)) + (F(u_+) - F(u_-)) \\ &= \int_{u_-}^{u_+} U'(v) \left(-a(u_-, u_+) + f'(v) \right) dv. \end{aligned}$$

Using integration by parts formula, one finds

$$\begin{aligned} E(u_-, u_+) &= U'(v) \left(-a(u_-, v)v + f'(v) \right) \Big|_{u_-}^{u_+} \\ &\quad - \int_{u_-}^{u_+} U''(v) \left(-a(u_-, u_+)v + f(v) \right) dv. \end{aligned}$$

We now add and subtract $U'(u_+)(-a(u_-, u_+)u_- + f(u_-))$, simplify and obtain

$$\begin{aligned} E(u_-, u_+) &= U'(u_+) \left(-a(u_-, u_+)(u_+ - u_-) + f(u_+) - f(u_-) \right) \\ &\quad + \left(U'(u_+) - U'(u_-) \right) \left(-a(u_-, u_+)u_- + f(u_-) \right) \\ &\quad - \int_{u_-}^{u_+} U''(v) \left(-a(u_-, u_+)v + f(v) \right) dv. \end{aligned}$$

The Rankine-Hugoniot condition implies that the first term vanishes, and so

$$\begin{aligned} E(u_-, u_+) &= \int_{u_-}^{u_+} U''(v) \left(-a(u_-, u_+)u_- + f(u_-) \right) dv \\ &\quad - \int_{u_-}^{u_+} U''(v) \left(-a(u_-, u_+)v + f(v) \right) dv \\ &= - \int_{u_-}^{u_+} U''(v)(v - u_-) \left(\frac{-a(u_-, u_+)(v - u_-)}{v - u_-} + \frac{f(v) - f(u_-)}{v - u_-} \right) dv, \end{aligned}$$

which is what we wanted to show. \square

\square

Proposition 2.2.1. *Given a generic flux function f with n inflection points and a state $u_- > I_1$, then the following properties hold :*

- i) $E(u_-, u_-) = 0$;
- ii) $E(u_-, \cdot)$ is positive and increasing over $(u_-, +\infty)$;
- iii) $E(u_-, \cdot)$ is negative and increasing for arguments sufficiently close but smaller than u_- ;

iv) $E(u_-, \cdot)$ changes its monotonicity at points v at which the tangent to f at $(v, f(v))$ crosses $(u_-, f(u_-))$.

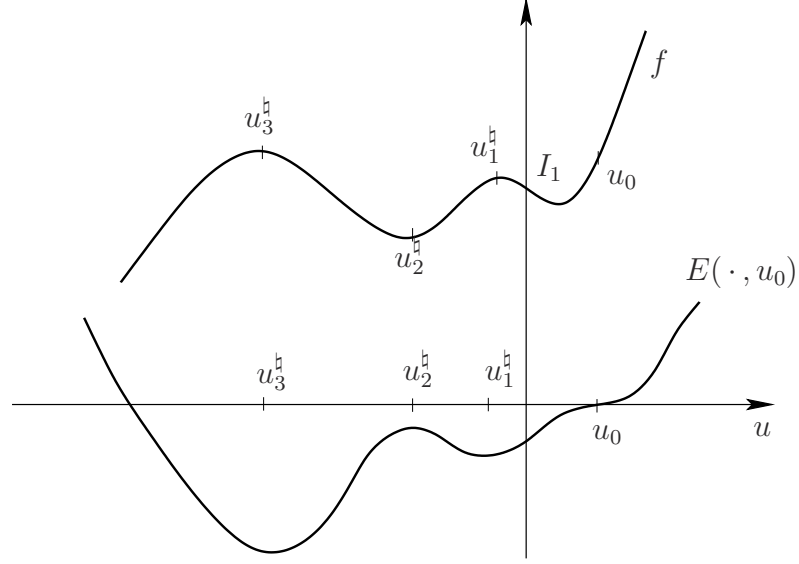


FIGURE 2.1. Graph of the flux-function f and the entropy E as a function of the right-hand state.

DÉMONSTRATION. We compute the derivative

$$\begin{aligned} \partial_{u_+} E(u_-, u_+) &= - \left(U(u_+) - U(u_-) \right) \partial_{u_+} a(u_-, u_+) - a(u_-, u_+) U'(u_+) + \partial_{u_+} F(u_+) \\ &= \left(U(u_-) - U(u_+) \right) \partial_{u_+} a(u_-, u_+) - U'(u_+) \left(a(u_-, u_+) - f'(u_+) \right). \end{aligned}$$

Since

$$\partial_{u_+} a(u_-, u_+) = \frac{f'(u_+) - a(u_-, u_+)}{u_+ - u_-}, \quad (2.2.12)$$

we conclude that

$$\partial_{u_+} E(u_-, u_+) = b(u_-, u_+) \partial_{u_+} a(u_-, u_+), \quad (2.2.13)$$

where

$$b(u_-, u_+) = \left(U(u_-) - U(u_+) \right) - U'(u_+) (u_- - u_+).$$

Since U is strictly convex, then $b > 0$ for all u_-, u_+ and hence the monotonicity of E is determined by the sign of $\partial_{u_+} a$. In particular, the formula (2.2.12) shows that the critical points of E are precisely the points v where the slope of the tangent equals the slope of the secant joining $(v, f(v))$ and $(u_-, f(u_-))$. On the other hand, Parts *i*) and *ii*) are easily checked. \square

Lemme 2.2.2. *Fix $u_- > I_1$, then there exists at most one tangency point u^\natural in each interval \mathcal{I}_k , that is to say a point satisfying*

$$f'(u^\natural) = \frac{f(u^\natural) - f(u_-)}{u^\natural - u_-}, \quad (2.2.14)$$

so that in total, there are at most n tangency points.

DÉMONSTRATION. Without loss of generality, assume that f is concave over $\mathcal{I}_k = [I_k, I_{k-1}]$. Assume that we have at least one tangency point u^\natural in the interval. Since the graph of f is concave, then the tangent of f at $u \in [I_k, u^\natural]$ is strictly above the graph of f over \mathcal{I}_k , and in particular at u^\natural . Since the slope of the tangent at $u \in [I_k, u^\natural]$ is also larger than at u^\natural , then the tangent at u is strictly above the one at u^\natural over $[u^\natural, \infty]$. This implies that if (when) the tangent at u crosses the graph of f over \mathcal{I}_0 , then necessarily it will cross above $(u_-, f(u_-))$, and hence no other point in $[I_k, u^\natural[$ can satisfy (2.2.14).

The argument is similar over $]u^\natural, I_{k-1}]$, and there exists at most one tangency point per interval between changes in convexity. \square

Définition 2.2.2. *Assume that there exists $J \geq 1$ tangency points, denoted by*

$$u_J^\natural < u_{J-1}^\natural < \cdots < u_1^\natural,$$

that is, points at which (2.2.14) is satisfied. Introduce the intervals $\mathcal{I}_i^\natural = [u_i^\natural, u_{i-1}^\natural]$, with the assumption that $u_0^\natural = u_-$.

Later, we will show (in Lemma 2.4.3) that there exists at least one tangency point, i.e. $J \geq 1$. At this stage of the analysis, Lemma 2.2.2 only provides an upper bound on the number of tangency points.

Corollaire 2.2.1. *In each interval \mathcal{I}_i^\natural , the entropy dissipation function $E(\cdot, u_-)$ admits at most one root.*

DÉMONSTRATION. By Proposition 2.2.1, the monotonicity of E only changes at the endpoints of the interval \mathcal{I}_i^\natural , hence it can have at most one root in that interval. \square

2.3. DIFFUSIVE-DISPERSIVE TRAVELING WAVES

2.3.1. The traveling wave problem

We now derive the traveling wave equation and present conditions under which such solutions exist. We thus consider the conservation law with linear diffusion and dispersion (2.1.3), or say in the form

$$\partial_t u^\epsilon + \partial_x f(u^\epsilon) = \epsilon b u_{xx}^\epsilon + \epsilon^2 c u_{xxx}^\epsilon, \quad (2.3.1)$$

in which $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a generic flux with n inflection points, and the ratio

$$\alpha := \frac{b}{\sqrt{c}}$$

is held fixed for some constants $b, c > 0$. Solutions to the regularized conservation law (2.3.1) are smooth and so we search for solutions to this equation which converge as $\epsilon \rightarrow 0$ to discontinuous solutions of the form (2.2.9). Given the fact that the first-order conservation law is invariant under self-similarity, we can restrict our attention to the class of solutions to (2.3.1) that are functions of $(x - at)/\epsilon$, only.

Définition 2.3.1. *A function $u^\epsilon(x, t) = w(y)$ with $y := \alpha \frac{(x - at)}{\epsilon b}$ is called a traveling wave of the equation (2.3.1) (traveling at the speed a and connecting u_- to u_+) if it is a smooth solution to (2.3.1) satisfying*

$$w(-\infty) = u_-, \quad w(+\infty) = u_+,$$

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} w'(y) = \lim_{|y| \rightarrow +\infty} w''(y) = 0.$$

When traveling waves of (2.3.1) exist, one is interested in their limit when $\epsilon \rightarrow 0$. This is a kind of admissibility criteria for shock waves of the conservation law (2.1.1). More general regularizations, in particular nonlinear ones, have been studied in Bedjaoui and LeFloch [8, 59] for fluxes with a single inflection point. In any vanishing regularization, the k^{th} order derivative must always be weighted by ϵ^{k-1} . For the purposes of studying the kinetic function framework, it is sufficient to examine only linear regularizations, but it appears that these results would be extended to nonlinear, but non-degenerate, regularizations as was treated in [59]. The key ingredient to such an extension would be the continuous dependence of solution to EDOs w.r.t. their parameters.

It is known that if w is a traveling wave solution, then the pointwise limit

$$u(x, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} w\left(\alpha \frac{x - at}{\epsilon b}\right) = \begin{cases} u_- & \text{for } x < at, \\ u_+ & \text{for } x \geq at, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

is a weak solution to (2.3.1) satisfying the entropy inequality (2.2.1) when the entropy is taken to satisfy

$$U''(u) = c,$$

the proof can be found in [46]. In the remainder, we will therefore assume that the entropy is chosen in this form, which reduces to

$$U(u) = c \frac{u^2}{2}, \quad (2.3.3)$$

with the entropy flux taken to satisfy $F' = U' \cdot f'$. Note that the results in the previous section on entropy hold for an arbitrary entropy U .

Abusing our notation for u , we search for traveling wave solutions $u = u(y)$ of (2.3.1) depending on the rescaled spatial variable $y := \alpha \frac{(x - at)}{\epsilon b} = \frac{(x - at)}{\epsilon \sqrt{c}}$. Substituting $u(y)$ into (2.3.1), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon \sqrt{c}} \left(-au_y + f_y(u) \right) &= \frac{1}{\epsilon \sqrt{c}} \left(b\epsilon \frac{1}{\epsilon \sqrt{c}} u_{yy} + c\epsilon^2 \frac{1}{c\epsilon^2} u_{yyy} \right), \\ -au_y + f_y(u) &= \alpha u_{yy} + u_{yyy}. \end{aligned}$$

We find that a traveling wave of (2.3.1) connecting u_- to some state u_+ , is the solution $u(y)$ of the ordinary differential equation

$$-au_y + f_y(u) = \alpha u_{yy} + u_{yyy}, \quad (2.3.4)$$

with the boundary conditions

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} u(y) = u_{\pm}, \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} u_y(y) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} u_{yy}(y) = 0. \quad (2.3.5)$$

Integrating (2.3.4) from L to y , we deduce

$$\begin{aligned} -a(u(y) - u(L)) + f(u(y)) - f(u(L)) \\ = \alpha(u_y(y) - u_y(L)) + (u_{yy}(y) - u_{yy}(L)), \end{aligned}$$

In view of (2.3.5), taking the limit as $L \rightarrow -\infty$, we obtain

$$-a(u(y) - u_-) + f(u(y)) - f(u_-) = \alpha u_y(y) + u_{yy}(y). \quad (2.3.6)$$

Letting $y \rightarrow +\infty$, we see that the speed a must satisfy

$$-a(u_+ - u_-) + f(u_+) - f(u_-) = 0, \quad (2.3.7)$$

which is the Rankine-Hugoniot condition.

Setting now $v = u_y$. We reformulate (2.3.6) as a differential system of two equations,

$$\frac{d}{dy} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v + (f(u) - au) - (f(u_-) - au_-) \end{pmatrix}. \quad (2.3.8)$$

We define the function $T(u, v)$ as

$$T(u, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v + (g(u, a) - g(u_-, a)) \end{pmatrix}, \quad g(u, a) = f(u) - au, \quad (2.3.9)$$

while the boundary conditions take the form

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.10)$$

with

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} v_y(y) = 0.$$

It is clear that solutions to system (2.3.8) are at least C^1 , and in fact the first component will be at least C^2 , by the fundamental theorem for ordinary differential equations.

2.3.2. Traveling waves associated with a given speed

We want to study the asymptotic behavior of trajectories of (2.3.8). For this purpose, we consider the stability of the equilibria of (2.3.8). By definition, a point (u, v) is called an *equilibrium point* of (2.3.8) if $T(u, v) = (0, 0)^T$.

Lemme 2.3.1. *Consider a generic flux function f with n inflection points and a state u_- fixed, greater than the largest inflection point I_1 . The function T in (2.3.9) vanishes at the equilibrium points $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ satisfying*

$$g(u, a) = g(u_-, a) \text{ and } v = 0. \quad (2.3.11)$$

This implies that at the equilibrium point $(u_-, 0)$, the Rankine-Hugoniot condition is satisfied and that there exists at most $n + 2$ equilibria u satisfying (2.3.11).

DÉMONSTRATION. The equilibria occur at values of u and v for which

$$T(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.12)$$

This implies that $v = 0$ and $g(u, a) = g(u_-, a)$ which is equivalent to

$$f(u) - au = f(u_-) - au_-,$$

hence

$$a = \frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-}. \quad (2.3.13)$$

For fixed a and u_- , the line of slope a through $(u_-, f(u_-))$ can cross the graph f at most $(n + 2)$ times since $f(u) - au$ has n inflection points. \square

To exhibit nonclassical trajectories, Consider the geometric situation where there are exactly $K + 1$ equilibria $(u_i, 0)$, $i = 0, 1, 2, \dots, K$ satisfying (2.3.11). We number these points from right to left

$$u_K < \dots < u_1 < u_0 := u_-.$$

If $(u_i, 0)$ is an equilibrium point, the Jacobian matrix $DT(u_i)$ is given by

$$DT(u_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (f'(u_i) - a) & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

The characteristic equation of $DT(u_i)$

$$\det(DT(u_i) - \mu I) = \mu^2 + \alpha\mu - (f'(u_i) - a) = 0 \quad (2.3.15)$$

which admits two roots. They are found to be

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_i &= -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (f'(u_i) - a)}, \\ \bar{\mu}_i &= -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (f'(u_i) - a)}. \end{aligned}$$

The two corresponding eigenvectors are

$$\underline{r}_i = [1, \underline{\mu}_i]^T, \quad \text{and} \quad \bar{r}_i = [1, \bar{\mu}_i]^T. \quad (2.3.16)$$

Lemme 2.3.2. *For $i = 0, \dots, K$ and in the range of parameters where $\underline{\mu}_i$ and $\bar{\mu}_i$ remain real-valued, we have*

$$\frac{\partial \underline{\mu}_i}{\partial a}(u_i; a, \alpha) > 0, \quad \frac{\partial \underline{\mu}_i}{\partial \alpha}(u_i; a, \alpha) < 0, \quad \frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial a}(u_i; a, \alpha) < 0.$$

Moreover, under the assumption $f'(u_i) - a > 0$, we have

$$\frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial \alpha}(u_i; a, \alpha) < 0.$$

DÉMONSTRATION. This requires only a simple verification based on the explicit formulas for the roots. \square

Lemme 2.3.3. *Between each consecutive pair of equilibrium points, say u_i and u_{i+1} , there exists at least one point tangency point u^\natural , that is a point satisfying*

$$f'(u^\natural) = \frac{f(u^\natural) - f(u_0)}{u^\natural - u_0}.$$

In particular, the number of equilibrium points is bounded, i.e. $K \leq n + 1$.

DÉMONSTRATION. The condition (2.3.11) on u_i and u_{i+1} is equivalent to the geometrical condition that the secant of slope a through $(u_0, f(u_0))$ cross the graph of f at $(u_i, f(u_i))$ and $(u_{i+1}, f(u_{i+1}))$.

For the sake of clarity, suppose that $f'(u_i) < a$, the other case being identical. Then $f'(u_{i+1})$ must be greater than a . We now examine the function $H(u, \varphi)$ whose roots correspond to tangents at $(\varphi, f(\varphi))$ that cross the graph of f at

$(u, f(u))$, given in [46],

$$H(u, \varphi) = \frac{f(u) - f(\varphi) - f'(\varphi)(u - \varphi)}{(u - \varphi)^2}.$$

At $\varphi = u_i$, we have that the sign of $H(u_0, u_i)$ is determined by the sign of the numerator

$$f(u_0) - f(u_i) - f'(u_i)(u_0 - u_i).$$

Since

$$f(u_0) - f(u_i) - a(u_0 - u_i) = 0,$$

and $f'(u_i) < a < f'(u_{i+1})$, we have that $H(u_0, \varphi)$ changes sign within the interval $\varphi \in]u_{i+1}, u_i[$, and therefore must possess a root inside that interval.

The argument is sufficient for flux functions whose graph crosses transversally the graph of the secant. When $f'(u_i) = a$, then intuitively speaking, two equilibrium points have merged and the equilibrium points also provide a tangency point u^\natural . \square

Définition 2.3.2. Consider a differential system of the form (2.3.12) where K is a smooth mapping. Let $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^2$ be an equilibrium point, that is, a root of $K(u^*, v^*) = 0$. Denote by $\underline{\mu} = \underline{\mu}(u^*, v^*)$ and $\overline{\mu} = \overline{\mu}(u^*, v^*)$ the two (real or complex) eigenvalues of the Jacobian matrix of K at (u^*, v^*) . Then, the equilibrium (u^*, v^*) is called

- a **stable point** if $\text{Re}(\underline{\mu})$ and $\text{Re}(\overline{\mu})$ are both negative,
- a **saddle point** if $\text{Re}(\underline{\mu})$ and $\text{Re}(\overline{\mu})$ have opposite sign,
- or an **unstable point** if $\text{Re}(\underline{\mu})$ and $\text{Re}(\overline{\mu})$ are both positive.

Moreover, a stable or unstable point is called a **node** if the eigenvalues are real and a **spiral** if they are complex conjugate.

Since we consider the asymptotic behaviour $u \rightarrow u_+$ as $y \rightarrow +\infty$ and $u \rightarrow u_-$ as $y \rightarrow -\infty$, according to the above definition, one can easily verify the following result.

Lemme 2.3.4. For each fixed value of u_- , a and each equilibrium point $(u_i, 0)$, then

- if $f'(u_i) - a < 0$, then $(u_i, 0)$ is a stable point,
- if $f'(u_i) - a > 0$, then $(u_i, 0)$ is a saddle point.

Furthermore, in the cases that $f'(u_i) - a < 0$ we have the additional result : When $f'(u_i) - a \geq -(\alpha/2)^2$ the equilibrium is a node, and is a spiral otherwise.

Lemme 2.3.5. Consider a generic flux function f with n inflection points and the related system of differential equations (2.3.12) with $K + 1$ equilibria $(u_i, 0)$, $i = 0, 1, 2, \dots, K$ satisfying (2.3.11).

- i) The first equilibria u_0 is a saddle point.

ii) *The $K + 1$ equilibria alternate between a saddle point and a stable point (either node or spiral).*

DÉMONSTRATION. Assume that we have two consecutive saddle equilibria $u_{i+1} < u_i$. By Lemma 2.3.4, $f'(u_i) - a > 0$ and $f'(u_{i+1}) > 0$. At the equilibrium points,

$$a = \frac{f(u_i) - f(u_0)}{u_i - u_0} = \frac{f(u_{i+1}) - f(u_0)}{u_{i+1} - u_0},$$

and so $h(u) := (f(u) - f(u_0))/(u - u_0) - a$ has roots at both u_i and u_{i+1} but

$$h'(u) = f'(u) - \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}.$$

At $u = u_i$ and u_{i+1} , $h'(u_i) = f'(u_i) - a > 0$ and $h'(u_{i+1}) = f'(u_{i+1}) - a > 0$, so h is increasing, and in particular, $h(u_i - \epsilon) < 0$ for a sufficiently small and positive ϵ . There must therefore be a root of h between u_{i+1} and $u_i - \epsilon < u_i$ which contradicts our earlier hypothesis.

The proof for two consecutive stable points is identical. \square

We are looking for trajectories connecting $(u_0, 0)$ to one of the other K equilibrium points. We therefore introduce some notation for the trajectories outgoing or incoming from these points. At each point $(u_i, 0)$, we denote the four quadrants centered at that point by

$$\begin{aligned} Q_i^1 &= \{(u, v)/u \geq u_i, v \geq 0\}, \\ Q_i^2 &= \{(u, v)/u \leq u_i, v \geq 0\}, \\ Q_i^3 &= \{(u, v)/u \leq u_i, v \leq 0\}, \\ Q_i^4 &= \{(u, v)/u \geq u_i, v \leq 0\}. \end{aligned}$$

For each fixed u_0 and wave speed a , we define $C_{i,\alpha}^j$ to be the trajectory (not the solution) leaving or entering (asymptotically) the quadrant Q_i^j for a fixed diffusion-dispersion ratio α . If the trajectory is leaving u_i , let $y_{i,j}^+$ be the first time $C_{i,\alpha}^j$ crosses the $v = 0$ line, and similarly, let $y_{i,j}^-$ be the last time the trajectory entering u_i crossed the line $v = 0$.

Lemme 2.3.6. *Fix u_0 , the speed a and the diffusion-dispersion ratio α . Consider an equilibrium point $(u_i, 0)$ of system (2.3.8) and the four neighboring quadrants*

If $(u_i, 0)$ is a saddle equilibrium, then there are two trajectories $C_{i,\alpha}^2$ and $C_{i,\alpha}^4$ approaching $(u_i, 0)$ as $y \rightarrow +\infty$. There are also two trajectories $C_{i,\alpha}^1$, $C_{i,\alpha}^3$ leaving $(u_i, 0)$ for $y \rightarrow -\infty$.

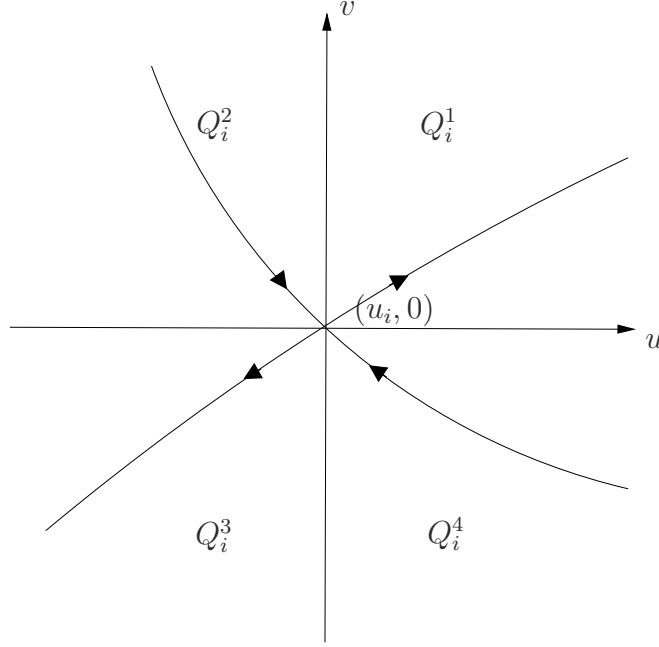


FIGURE 2.2. The four neighboring quadrants of a saddle equilibrium $(u_i, 0)$.

DÉMONSTRATION. The result follows immediately from the calculation of the eigenvectors (2.3.16) and the fact that the eigenvalues satisfy $\underline{\mu}_i < 0 < \overline{\mu}_i$ at all equilibrium points. \square

2.4. NONCLASSICAL TRAVELING WAVE SOLUTIONS AND DEPENDENCE IN α

2.4.1. A generalization of Maxwell's equal area rule

Our objective is to study traveling wave solutions as a function of the diffusion-dispersion ratio α but the trajectory of these solutions in phase-space will be delimited by the regions of the solutions corresponding to purely dispersive waves. More specifically, as in [59], a generalization of Maxwell's equal area rule plays a fundamental role in characterizing such traveling waves. We will therefore require the following fundamental assumption on the flux and the entropy to ensure the existence of trajectories connecting stable points to stable points.

Maxwell's equal area rule. *We assume that the flux f and the entropy E are such that for each fixed left-hand state u_0 inside an open interval \mathcal{J}_0 , there exists a largest root $\varphi_0^b(u_0) < u_0$, that is*

$$E(u_0, \varphi_0^b(u_0)) = 0. \quad (2.4.1)$$

For instance, this condition always hold for a flux satisfying the asymptotic conditions in Definition 2.2.1 provided the flux is concave near $-\infty$ and convex near $+\infty$, or vice-versa.

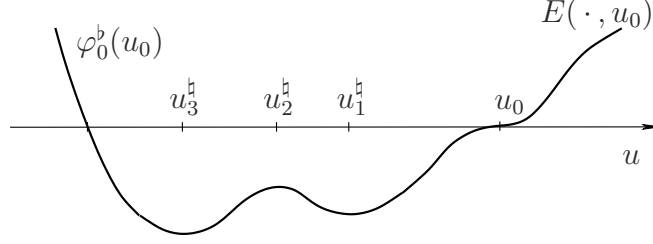


FIGURE 2.3. Graph of the entropy E as a function of the right-hand state.

Lemme 2.4.1. *The function φ_0^b is C^1 over \mathcal{J}_0 .*

DÉMONSTRATION. The function φ_0^b is the root of E which is an integral depending on f and U'' and whose limits of integration depend on u and u_0 . The root is therefore C^1 with respect to the upper limit of integration, which also appears within the portion $a = a(u, u_0)$ of the integrand. \square

To be useful, the above condition on the entropy must be related to the system (2.3.12). To the state $u_0 := u_-$ and the speed a we associate the following function of the variable u ,

$$G(u; u_0, a) = \int_{u_0}^u [g(z, a) - g(u_0, a)] dz. \quad (2.4.2)$$

where the function $g(u, a) = f(u) - au$ characterizes equilibrium points in Lemma 2.3.1. The advantage is that the functions G and E are related by

$$c G(u; u_0, a(u, u_0)) = -E(u_0, u), \quad (2.4.3)$$

where c is the constant in the definition of the entropy (2.3.3). Moreover, the system (2.3.12) can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} u_y &= v, \\ v_y &= -\alpha v + \partial_u G(u; u_0, a). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Note also that the derivative $\partial_u G(u; u_0, a)$ vanishes exactly at the equilibria u_i , $i = 0, 1, \dots, K$, satisfying (2.3.11).

Lemme 2.4.2. *The function $\partial_u G(u; u_0, a)$ satisfies the following three properties.*

- i) $\partial_u G(u; u_0, a) > 0$ for $u > u_0$.
- ii) $G(\cdot; u_0, a)$ changes its monotonicity at the equilibria u_i , $i = 0, 1, \dots, k$.

iii) $\partial_a G(u; u_0, a) < 0$ for $u < u_0$.

DÉMONSTRATION. The sign of $\partial_u G(u; u_0, a)$ is the same as the sign of the function

$$g(u, a) - g(u_0, a) = (u - u_0) \left(\frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} - a \right). \quad (2.4.5)$$

For fixed u_0 and speed a , the sign of $\partial_u G(u; u_0, a)$ is easy to determine from the graph of the function f . The proof of the third property follows immediately from the definition (2.4.2). We compute

$$\begin{aligned} \partial_a G(u; u_0, a) &= \partial_a \int_{u_0}^u \left[(f(z) - az) - (f(u_0) - au_0) \right] dz \\ &= \int_{u_0}^u \left(-z + u_0 \right) dz = -\frac{(u - u_0)^2}{2} < 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.4.3. *If Maxwell's equal area rule holds, then there exists at least one tangency point u^\natural between $\varphi_0^b(u_0)$ and u_0 . In particular, Maxwell's Rule implies that $J \geq 1$.*

DÉMONSTRATION. Suppose that the root of E belongs to the interval \mathcal{I}_i . The entropy is negative between $\varphi_0^b(u_0)$ and u_0 , therefore it must have at least one change in monotonicity between those two points. By Proposition 2.2.1, changes in monotonicity occur at tangency points. □

2.4.2. Properties of the diffusive-dispersive trajectories

We now return to the relation between Maxwell's equal area rule and solutions to the system (2.4.4). When $u = \varphi_0^b(u_0)$, then

$$0 = E(u_0, \varphi_0^b(u_0)) = -c G(\varphi_0^b(u_0); u_0, a(u_0, \varphi_0^b(u_0))),$$

so that $\varphi_0^b(u_0)$ is an equilibrium point when $a = a(\varphi_0^b(u_0), u_0)$. According to Lemma 2.4.2, this implies that G changes its monotonicity at $u = \varphi_0^b(u_0)$ and therefore that $u = \varphi_0^b(u_0)$ is a second order root of G with respect to u , for u_0 and a fixed. The third part of Lemma 2.4.2 states that for u_0 and $u = \varphi_0^b(u_0)$ fixed, then G admits no root for $a < a(\varphi_0^b(u_0), u_0)$ and remains positive at least until the next equilibrium point appears to the left of $\varphi_0^b(u_0)$. On the other hand, for $a > a(\varphi_0^b(u_0), u_0)$ but close to $a(\varphi_0^b(u_0), u_0)$, the second order root splits into two roots and G admits one root $\eta = \eta(u_0, a)$ that is strictly to the right of $\varphi_0^b(u_0)$. This observation is summarized in the following lemma.

Lemme 2.4.4. *If Maxwell's equal area rule holds, then there exists an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ such that for all $(u, a) \in \Omega$, the function $G(\cdot; u, a)$ admits a unique largest root $\bar{u} = \bar{u}(u, a)$ greater than $\varphi_0^b(u)$.*

Concerning the article by Bedjaoui, Chalons, Coquel and LeFloch [59] which guided much of this work, it is more accurate to state that they did not assume Maxwell's equal area rule but the less general condition that the function G possessed a unique largest root for a fixed u, u_0 and a . The formalism presented here is more consistent with the original approach of LeFloch [46], where the zero-diffusion kinetic function φ_0^b plays the fundamental role of restricting the values of the admissible left-hand states.

Henceforth, we will ignore all equilibrium points of G to the left of $\varphi_0^b(u_0)$ and assume that we have only K equilibrium points to the right of $\varphi_0^b(u_0)$, possibly at the cost of renaming K . The next result is similar to Proposition 3.1 from [59].

Lemme 2.4.5. *Assume that Maxwell's equal area rule holds. For all $\alpha \geq 0$, the trajectory $C_{0,\alpha}^1$ connects the point $(u_0, 0)$ in the phase plane to one of the equilibrium points $(u_i, 0)$ with $u_i \in]\varphi_0^b(u_0), u_0[$, and $i \in \{1, \dots, K\}$.*

DÉMONSTRATION. The proof is identical to the one found in [59] for Theorem 3.1. Multiplying (2.4.4) by $v = u_y$ and integrating from $-\infty$ to y , we find

$$\int_{-\infty}^y \frac{d}{dy} \left(\frac{v^2(y')}{2} \right) dy' + \alpha \int_{-\infty}^y v^2(y') dy' = \int_{-\infty}^y \partial_u G(u(y'); u_0, a) u_y(y') dy',$$

or after applying the boundary conditions,

$$\frac{v^2(y)}{2} + \alpha \int_{-\infty}^y v^2(y') dy' = G(u(y); u_0, a). \quad (2.4.6)$$

The left-hand side is always positive, so values of u are only attainable by a trajectory if $G(u(y); u_0, a)$ is positive throughout the trajectory. The function $G(\cdot; u_0, a)$ admits a largest positive root at $\varphi_0^b(u_0) < \bar{u}(u_0, a)$ when $a > a(\varphi_0^b(u_0), u_0)$ and remains positive only over $] \bar{u}(u_0, a), u_0[$.

This implies that the continuous solution $u(y)$ is bounded since the argument belongs to a compact, and therefore $v(y) = u_y(y)$ must also be bounded. In particular, equation 2.4.6 shows that as $y \rightarrow \infty$, the integral $\int^y v^2 dy'$ must be finite, hence $v(y) \rightarrow 0$. Therefore the trajectory must approach an equilibrium point $(u_i, 0)$ for some $i \in \{1, \dots, K\}$. \square

Lemme 2.4.6. *For a given shock speed a , if a traveling wave solution connects $(u_0, 0)$ to a saddle point equilibria $(u_k, 0)$, it must leave the equilibria $(u_0, 0)$ at $y = -\infty$ in the quadrant Q_0^3 .*

DÉMONSTRATION. We will demonstrate that a trajectory solution $C_{0,\alpha}^1$ issuing from $(u_0, 0)$ in Q_0^1 cannot reach a saddle point $(u_k, 0)$. Suppose for a moment it could reach the state $(u_k, 0)$ at $+\infty$. Since $u_k < u_0$ by continuity there would exist y_0 such that $u(y_0) = u_0$. Multiplying (2.4.4) by $u_y = v$ we find

$$\left(\frac{v^2}{2}\right)_y + \alpha v^2 = \partial_u G(u; u_0, a) u_y.$$

Integrating over $(-\infty, y_0]$ we arrive at

$$\left(\frac{v^2(y_0)}{2}\right) + \alpha \int_{-\infty}^{y_0} v^2 dy = G(u(y_0); u_0, a) = 0.$$

Therefore $u_y(y_0) = v(y_0) = 0$ and, since $u(y_0) = u_0$, $u \equiv u_0$ and $v \equiv 0$ on \mathbb{R} . This contradicts the assumption that a trajectory could reach u_k at $y = +\infty$ if it originated from Q_0^1 . Any trajectory leaving $(u_0, 0)$ at $y = -\infty$ must therefore leave from quadrant Q_0^3 . \square

So far, we have shown that the trajectories leaving $(u_0, 0)$ in the phase plane must eventually approach one of the remaining K equilibrium points between $\varphi_0^b(u_0)$ and u_0 . Our objective is now to show that the set of trajectories as a function of α form a foliation of a bounded region in phase plane. The purely dispersive trajectories will determine the boundary of this region and as α increases, the trajectories will approach the u -axis and become increasingly oscillatory as the diffusion-dispersion ratio α crosses a countable set of values $\alpha^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$

Lemme 2.4.7. *Assume that Maxwell's equal area rule holds and consider purely dispersive waves when $\alpha = 0$. Fix a state and a speed $(u, a) \in \Omega$ and let $U = U(y)$ be a solution to (2.4.4) that reaches u_0 as $y \rightarrow -\infty$. Then there exists y_m such that $\bar{u}(u, a) = U(y_m)$ and the trajectory is monotone decreasing over $] -\infty, y_m[$ and monotone increasing over $] y_m, \infty[$. Moreover, as $y \rightarrow \infty$ we have $U(y) \rightarrow u_0$ and $C_{0,0}^3 = C_{0,0}^2$.*

DÉMONSTRATION. For $(u, a) \in \Omega$, we have that $\bar{u}(u, a)$ is the state satisfying

$$0 = G(\bar{u}(u, a); u, a) = \int_u^{\bar{u}(u, a)} [g(z, a) - g(u, a)] dz.$$

The now standard relation (2.4.6) when $\alpha = 0$ is

$$\frac{(U_y(y))^2}{2} = G(U(y); u_0, a)$$

and shows that we can only cross the u -axis when $U(y) = \bar{u}(u, a)$. If the solution reaches the $v = 0$ for the first time at $y = y_m$, then the derivative U_y must keep a negative sign for all $y \in] -\infty, y_m[$. Since $\bar{u}(u, a)$ is the largest root of G

that is smaller than u_0 , then the solution $U(y)$, that is monotone increasing for $y \in]y_m, y_m + \epsilon[$ for some epsilon, must remain monotone increasing until it reaches the next root of G at u_0 . If the solution approaches u_0 , then it must approach it asymptotically as $y \rightarrow \infty$.

We note that if $U = U(y)$ is a solution to (2.4.4) with $\alpha = 0$, then so is $W(y) = U(-y)$ since

$$W_y(y) = -U_y(-y),$$

$$W_{yy}(y) = U_{yy}(-y) = \partial_u G(U(-y); u_0, a) = \partial_u G(W(y); u_0, a).$$

This implies that $C_{0,0}^3 = C_{0,0}^2$. □

Lemme 2.4.8. *Assume that Maxwell's equal area rule holds. Fix a state and a speed $(u, a) \in \Omega$. Consider values of the diffusion-dispersion ratio $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$ and trajectories leaving or approaching saddle points, u_i for i even.*

- (i) *For $k = 1, 3$, as long as C_{i,α_1}^k and C_{i,α_2}^k are below (respectively above) the u -axis, then C_{i,α_1}^k remains below (respectively above) C_{i,α_2}^k .*
- (ii) *For $k = 2, 4$, as long as C_{i,α_1}^k and C_{i,α_2}^k are below (respectively above) the u -axis, then C_{i,α_1}^k remains below (respectively above) C_{i,α_2}^k .*

DÉMONSTRATION. We begin by treating the first case. The calculation of the eigenvectors shows that as α increases, the eigenvectors $\underline{r}_i = [1, \underline{\mu}_i]^T$ corresponding to the quadrants C_i^k become flatter, i.e. more aligned with the u -axis, since Lemma 2.3.2 showed that

$$\frac{\partial \underline{\mu}_i}{\partial \alpha}(u_i; a, \alpha) < 0.$$

When $k = 3$ ($k = 1$), the trajectory C_{i,α_1}^k is therefore below (above) C_{i,α_2}^k close to the saddle point u_i . This situation continues as long as both trajectories are below (above) the u -axis because the system (2.4.4) shows that curvature of the graph is increasingly convex (concave) as α increases. □

As in [59], we adopt the following definition.

Définition 2.4.1. *A traveling wave solution $u = u(y)$ of (2.4.4) is said to have k **oscillations** if there exists exactly k points $y_1 > \dots > y_k$ such that u is strictly monotone between these points and alternates between increasing and decreasing over the intervals delimited by these points.*

2.5. NONCLASSICAL TRAVELING WAVE SOLUTIONS AND GLOBAL ANALYSIS OF φ_0^b

Consider $u_- \in \mathcal{I}_1 = [I_1, +\infty[$, sufficiently close to I_1 . By [46], we know there exists a $\varphi_2^b(u_-)$ such that $E(\varphi_2^b(u_-), u_-) = 0$. There also exists a $\varphi_1^b(u_-)$ such that

$$\varphi_2^b(u_-) \leq \varphi_1^b(u_-) < I_1 < u_-,$$

and such that $E(\cdot, u_-)$ is negative and changes its monotonicity at $\varphi_1^b(u_-)$. According to [46], the function φ_2^b exists and is well-defined and continuous over its domain of definition \mathcal{I}_2^b , which is included in \mathcal{I}_1 .

Lemme 2.5.1. *The interval \mathcal{I}_2^b is closed.*

DÉMONSTRATION. Indeed, if the interval \mathcal{I}_2^b is half-closed, such that $\mathcal{I}_2^b = [I_1, u_2^b[$ then let $\{u_k\}_{k \geq 1}$ be a sequence of points in \mathcal{I}_2^b that converges to u_2^b as $k \rightarrow +\infty$. We then have

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} E(\varphi_2^b(u_k), u_k) = E(\varphi_2^b(u_2^b), u_2^b),$$

which shows that $u_2^b \in \mathcal{I}_2^b$. □

Lemme 2.5.2. *Let u_2^b be the upper bound of the closed interval \mathcal{I}_2^b , such that $E(\varphi_2^b(u_2^b), u_2^b) = 0$. Then we have the following statements.*

1. $E(\cdot, u_2^b)$ changes its monotonicity at its root $\varphi_2^b(u_2^b)$.
2. $\varphi_2^b(u_2^b)$ is a tangency point, i.e

$$f'(\varphi_2^b(u_2^b)) = \frac{f(\varphi_2^b(u_2^b)) - f(u_2^b)}{\varphi_2^b(u_2^b) - u_2^b}.$$

DÉMONSTRATION. The first statement is clear. If the monotonicity of $E(\cdot, u_2^b)$ is increasing, that means that we can increase the size of the interval \mathcal{I}_2^b which is impossible since u_2^b was the biggest upper bound for the closed interval \mathcal{I}_2^b . The second statement is a corollary of the first one and the Proposition (2.2.1). □

Lemma 2.5.2 implies two results, namely that at $u_2^b = \max \{\mathcal{I}_2^b\}$,

1. $\partial_{u_+} E(\cdot, u_2^b)|_{\varphi_2^b(u_2^b)} = 0$,
2. $\partial_{u_+}^2 E(\cdot, u_2^b)|_{\varphi_2^b(u_2^b)} < 0$.

Generically, for $u > u_2^b$ but sufficiently close to u_2^b , either there exists a new root to $E(\cdot, u)$ or there is not. If there is no root, then it is not possible to characterize the solutions but otherwise, there exists $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ such that $\varphi_{j_1}^b(u) \in \mathcal{I}_{j_1}$ and it is the largest root to $E(\cdot, u)$ for u close to u_2^b . By Lemma 2.5.1,

the domain of definition of $\varphi_{j_1}^b$ is closed and

$$\mathcal{I}_2^b \cap \mathcal{I}_{j_1}^b \neq \emptyset$$

since it must contain u_2^b .

Lemme 2.5.3. *Fix $u_- \in \mathcal{I}_i^b$ and $i < j_1$, then there exists at most one state u_i in \mathcal{I}_i such that $E(u_i, u_-) = 0$.*

DÉMONSTRATION. u_i is exactly $\varphi_{i-1}^b(u_-)$ and the result is given by Lemma 2.2.2. \square

This lemma implies that our notation for φ_j^b is well-defined.

As $u > u_2^b = \max \{\mathcal{I}_2^b\}$ increases, then either we reach the end of $\mathcal{I}_{j_1}^b$, in which case Lemma 2.5.2 applies, or a new larger root appears, say $\varphi_{j_2}^b \in \mathcal{I}_{j_2}^b$ for $j_2 < j_1$ and well-defined for all $u \in \mathcal{I}_{j_2}^b$ such that

$$\mathcal{I}_{j_1}^b \cap \mathcal{I}_{j_2}^b \neq \emptyset.$$

The second case is characterized by the following lemma.

Lemme 2.5.4. *Consider a smooth $\varphi_{j_1}^b(u)$ defined over $\mathcal{I}_{j_1}^b$ defining roots $0 = E(\varphi_{j_1}^b(u), u)$. Suppose that there exists $j_2 < j_1$ and roots $\varphi_{j_2}^b(u)$ of $E(\cdot, u)$ for $u \in \mathcal{I}_{j_2}^b$ with $\mathcal{I}_{j_1}^b \cap \mathcal{I}_{j_2}^b \neq \emptyset$. Then, if $u_{j_2}^l = \min \{\mathcal{I}_{j_2}^b\}$,*

1. $E(\cdot, u_{j_2}^l)$ changes its monotonicity at $\varphi_{j_2}^b(u_{j_2}^l)$;
2. $\varphi_{j_2}^b(u_{j_2}^l)$ is a tangency point, i.e.

$$f'(\varphi_{j_2}^b(u_{j_2}^l)) = \frac{f(\varphi_{j_2}^b(u_{j_2}^l)) - f(u_{j_2}^l)}{\varphi_{j_2}^b(u_{j_2}^l) - u_{j_2}^l}.$$

Remarque 2.5.1. *Taking Lemma 2.5.1, 2.5.2 and 2.5.4 together, we can summarize the situation by saying that for any φ_j^b , its domain of definition is closed and $E(\cdot, u)$ must have tangency points at the endpoints of \mathcal{I}_j^b for φ_j^b .*

Although we have so far described only transitions from $\varphi_{j_1}^b$ to $\varphi_{j_2}^b$. In general, all future transitions, as long as a largest root exists, fall under the purview of Lemmas (2.5.2) and (2.5.4). Hence, we have the following lemma.

Lemme 2.5.5. *If for all $u > I_1$, the Maxwell equal area rule is satisfied, then there exists a unique function*

$$\varphi_0^b(u) = \sup_{v \in \mathcal{I}_1} \{v \mid E(v, u) = 0\}$$

that is piecewise smooth, with tangency points at (u, v) if φ_0^b is right or left-handed continuous at that point.

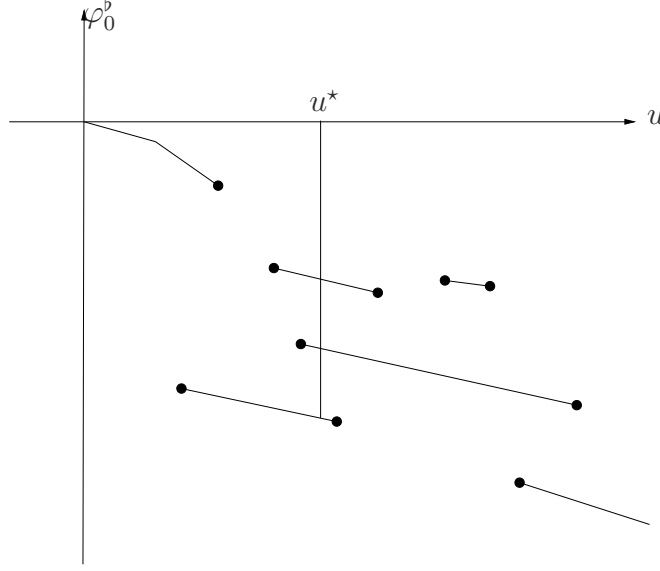


FIGURE 2.4. Kinetic function for the generic flux.

2.6. NUMERICAL EXPERIMENTS

Our objective is to present some numerical evidence for the existence of monotone and non-monotone trajectories. Throughout this section, we focus on a diffusive-dispersive conservation law (2.3.1) given by a flux with 5 inflection points. The flux is given explicitly by

$$f(u) = (u - 7)(u - 6)(u - 5)(u - 4)(u - 3)(u - 2)(u - 1) + 7u + 2, \quad (2.6.1)$$

and its graph can be found in Figure 2.5. Moreover, the entropy-entropy flux pair (U, F) is assumed to be $U(u) := u^2/2$ with F chosen to satisfy $F'(u) = U'(u)f'(u)$. The left-hand state will be fixed to $u_- = 7$ and for a Rankine-Hugoniot shock speed of $a = 7$, we find 7 equilibrium points ordered as follow $u_6 < u_5 < u_4 < u_3 < u_2 < u_1 < u_0 = u_-$. The equilibria u_k for k even are saddle points and those with k odd are stable and attractive.

Consider the trajectory $y \rightarrow u(y)$ leaving from u_0 at $-\infty$. We want to determine, for a given diffusion-dispersion ratio α , which points among the six equilibria will this trajectory reach as $y \rightarrow \infty$. We will also consider how α impacts the trajectories in phase-space. Clearly, the trajectory is associated with a so-called nonclassical shock if it reaches u_2 , u_4 , or u_6 , that is to say one of the saddle equilibria. Numerical solutions have been obtained with the help of the MATLAB function `ode45` [58] applied to the first-order system (2.3.6). We have compared the numerical results obtained with other MATLAB solvers, but we have found that the qualitative picture remains the same. The values of the critical diffusion-dispersion ratio obtained from different solvers only vary by roughly 10^{-4} .

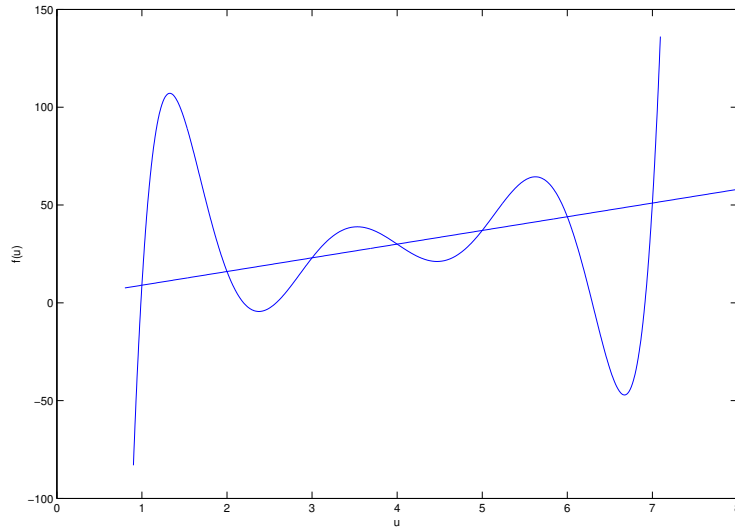


FIGURE 2.5. Flux function with 5 inflection points. The line, with the slope $a = 7$, passing through the point $(7, 51)$, intersects the graph of f at the seven equilibrium points.

As a first example, Figure 2.7 shows a numerical solution for $a = 7$, and $u_0 = 7$. We use the symbols \circ and \square to show respectively the saddle and stable points. The monotone traveling wave issuing from u_0 and reaching the saddle u_2 was obtained with $\alpha = 3.944134044$ and the monotone traveling wave reaching the saddle u_4 was obtained with $\alpha = 1.844932402$. As seen in the figure, the 1-oscillating traveling wave issuing from u_0 and reaching the saddle u_2 is obtained with $\alpha = 0.756125592$ while the 1-oscillating traveling wave reaching the saddle u_4 was obtained with $\alpha = 0.958669155$. This figure illustrates that there can be more than one nonclassical shock connecting two states and that as the diffusion-dispersion ratio increases, the nonclassical waves become increasingly oscillatory.

In the second example, we examine in greater detail the transition between classical trajectories, i.e. trajectories joining u_0 to one of the stable attractive equilibria, and nonclassical trajectories. One immediately observes that the $\alpha = 0$ trajectory bounds the region containing all the other trajectories. Similarly, the two nonclassical trajectories connecting u_0 and u_4 , for respectively $\alpha = 0.95$ and 1.84 bound the trajectory connecting to the stable equilibria u_5 .

We have also studied numerical solutions of (2.3.1) for a flux-function with 5 inflection points, but numerical experiments with a flux-function having 3 or 7 inflection points have resulted in the same qualitative behaviour.

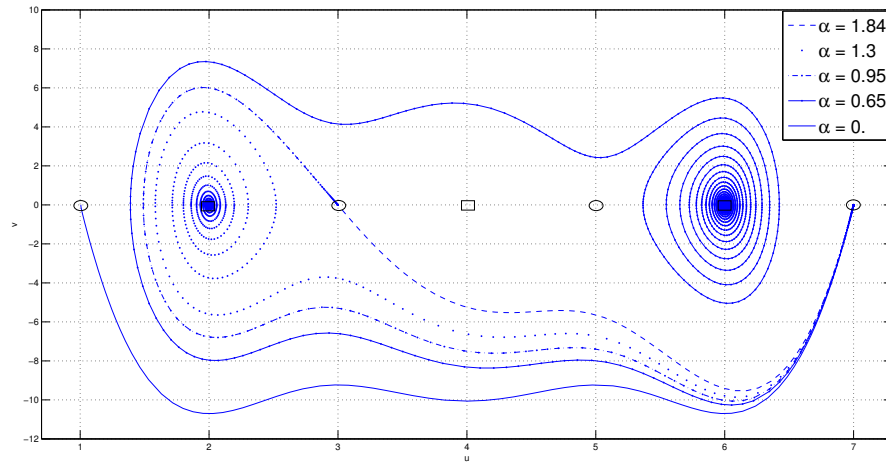


FIGURE 2.6. Monotone and 1-oscillating trajectories from u_0 to saddle points u_2 and u_4 . Trajectories from u_0 to the stable equilibria u_1 and u_5 are also included to emphasize the transitions between the asymptotic limits as a function of α .

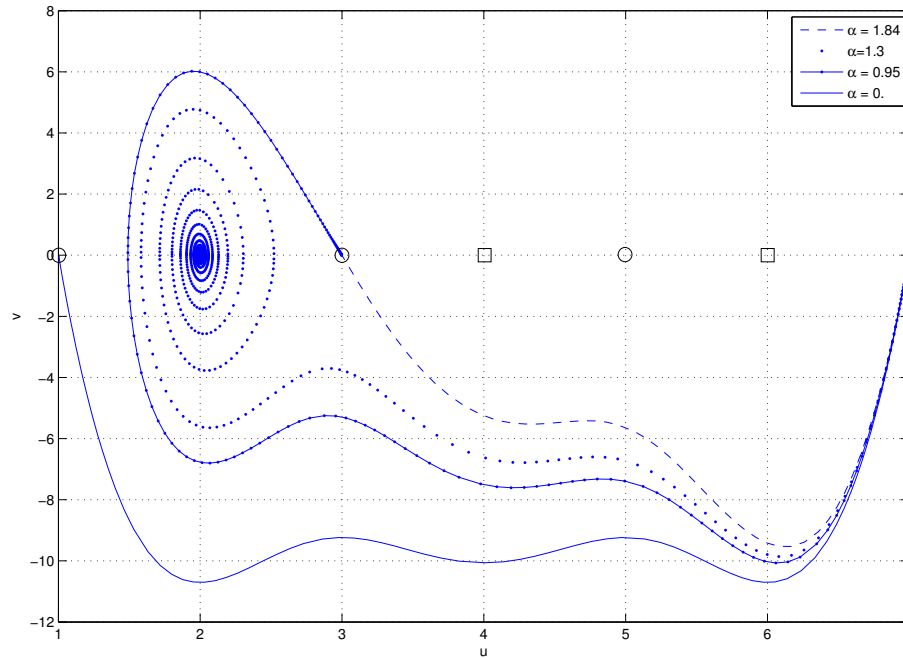


FIGURE 2.7. Trajectories towards u_4 and u_5 . Note that the monotone trajectory and the 1-oscillating trajectory bound the trajectories to the stable point u_5 . The $\alpha = 0$ trajectory is also included and it bounds all the trajectories to the equilibrium points.

2.7. CONCLUDING REMARKS

This analysis in this paper exploited the fact that the entropy was given by the explicit expression (2.3.3), specifically in the identity (2.4.3). Additional work could be done to analyze nonclassical shocks for arbitrary convex entropies. Furthermore, this work also treated only linear regularizations of the form (2.3.1), but as was done in [59], the work could be extended quite naturally to nonlinear regularizations. In fact, the largest obstacle would be an analysis of the regularity of the travelling solutions for such regularizations, but it is expected that the technical work in [59] would apply verbatim. Overall, we observe that a stronger selection criteria would be needed to handle nonclassical shocks with two or more oscillations.

Chapitre 3

SPLITTING-MERGING PATTERNS FOR PHASE TRANSITIONS WITH KINETICS AND NUCLEATION

3.1. INTRODUCTION

Objective of this paper

We consider the initial value problem associated with nonlinear hyperbolic systems of conservation laws in one space variable, and we establish the existence of *nonclassical entropy solutions* (in the sense introduced in [46]), which, for instance, arise in complex fluid flows in the limit of vanishing viscosity and capillarity. The solutions under consideration exhibit a “splitting–merging pattern” and consist of finitely many (classical or nonclassical) big waves and classical small waves. More precisely, our analysis relies on a new nonclassical Riemann solver which is motivated by the theory of phase transition dynamics and is based on, first of all

- a *kinetic relation* for the propagation of nonclassical undercompressive shocks

and optionally on

- a *nucleation criterion* that selects between classical and nonclassical behavior.

All solutions satisfy a single entropy inequality associated with a given entropy pair, and we note that the kinetic relation is equivalent to imposing the rate of entropy dissipation across nonclassical shocks. The existence of nonclassical entropy solutions for *scalar* equations was recently established for the initial value problem by the last two authors [42] who, building on earlier works [23, 63, 65, 46, 48], succeeded to identify a “natural” total variation functional adapted to deal with nonclassical shock waves and their interactions. By natural, we mean

that the construction of the total variation relied explicitly on the main property of the kinetic function, namely the contractivity of its' iterates. In the present paper, we provide a new development to this theory and we are able to

- construct nonclassical entropy solutions to nonlinear strictly hyperbolic systems, and
- exhibit the *splitting–merging* phenomena for systems, which illustrates the complexity of fluid flows involving phase transitions.

To achieve these results, we introduce here new functionals that suitably measure the total variation and wave interaction of nonclassical and classical waves. When the nucleation criterion is introduced, we show that these functionals are strictly decreasing by an amount proportional to the strength of the nucleation criteria.

Recall that the kinetic relation is an additional jump relation required only for nonclassical undercompressive shocks. It generalizes to general systems of conservation laws a notion originally introduced for a (hyperbolic-elliptic) model of phase transition dynamics first studied by Slemrod [72, 73], Abeyaratne-Knowles [3, 2], and Truskinovsky [76, 77]. The kinetic relation was next defined and investigated mathematically by LeFloch and collaborators [34, 36, 45, 46] for *general* hyperbolic systems. More recently, restricting attention to scalar conservation laws, LeFloch and Shearer [48] observed that classical solutions may be relevant in certain applications involving for concave-convex fields *even* when a nonclassical solution is available. This observation led them to propose a non-classical Riemann solver with kinetics and *nucleation*, which, roughly speaking, allows for nonclassical behavior only for Riemann problems having sufficiently ‘large’ initial jump. This proposal was motivated by research on the dynamics of thin films in which capillarity effects play a driving role on propagating interfaces; cf. Bertozzi, Münch, and Shearer [1] and Bertozzi and Shearer [9].

Notation and assumptions

Let us outline the main result established in this paper. We thus consider nonlinear hyperbolic system of conservation laws in one space dimension, of the general form

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u = u(t, x) \in \mathcal{B}(\delta_0) \quad (3.1.1)$$

and, as is customary, we focus attention on *weak solutions* to (3.1.1) which are understood in the sense of distributions and are assumed to take values near a given constant state in \mathbb{R}^N , normalized to be the origin. Here, $\mathcal{B}(\delta_0) \subset \mathbb{R}^N$ is the ball centered at the origin and with small radius $\delta_0 > 0$, the flux $f : \mathcal{B}(\delta_0) \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth (C^3 , say) vector-valued map,

In addition, weak solutions of interest should satisfy the *entropy inequality*

$$\partial_t U(u) + \partial_x F(u) \leq 0, \quad (3.1.2)$$

in which the entropy $U : \mathcal{B}(\delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ is assumed to be strictly convex, and the associated entropy flux $F : \mathcal{B}(\delta_0) \subset \mathbb{R}^N$ satisfies, by definition, $\nabla F(u)^T = \nabla U(u)^T Df(u)$.

Let us first stress that our motivation for imposing the *single* entropy inequality (3.1.2) comes from the fact that most (if not all) regularizations of (3.1.1) arising in applications, of the form

$$\partial_t u^\epsilon + \partial_x f(u^\epsilon) = R^\epsilon = R^\epsilon(u^\epsilon, \epsilon u_x^\epsilon, \epsilon^2 u_{xx}^\epsilon, \dots)$$

are “conservative” and “entropy dissipative” in the limit $\epsilon \rightarrow 0$ and, formally at least, lead to weak solutions satisfying (3.1.1)–(3.1.2). (See [46, Chap. 1] for further details.)

Furthermore, we assume that (3.1.1) is a *strictly hyperbolic* system, for which the Jacobian matrix $A(u) := Df(u)$ has real distinct eigenvalues $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_N(u)$ and corresponding basis of left- and right-eigenvectors $l_i(u), r_i(u)$. Following Hayes and LeFloch [34, 36], a nonlinearity condition on the flux f is also imposed which roughly speaking requires that the flux f has “at most one inflection point” along every eigenvector direction — as this is a typical feature of most systems of interest in continuum physics, especially phase transition models. More precisely, we assume that each characteristic field of (3.1.1) is either (with $u \in \mathcal{B}(\delta_0)$)

- *genuinely nonlinear* (GNL), $i \in J_1$, that is, $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i(u) > 0$ after normalization, or
- *linearly degenerate* (LD), $i \in J_2$, that is, $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i(u) \equiv 0$, or
- *concave-convex* (C-C), $i \in J_3$.

In the latter case by definition (see [34, 36]), the scalar-valued function $m_j(u) := (\nabla \lambda_j \cdot r_j)(u)$ does not keep a constant sign, but $\mathcal{M}_j = \{u \in \mathcal{B}(\delta_0) \mid m_j(u) = 0\}$ is a smooth manifold with dimension $N - 1$, such that the vector field r_j is transverse to \mathcal{M}_j with

$$\text{concave-convex (C-C)} : \quad \nabla m_j(u) \cdot r_j(u) > 0. \quad (3.1.3)$$

Convex-concave fields can be defined similarly and, for simplicity in the presentation, will not be considered in the present paper.

We are now in a position to consider the initial value problem associated with (3.1.1), whose simplest version is provided by the so-called *Riemann problem*, for which the initial data consist of two constant states $u_l, u_r \in \mathcal{B}(\delta_1)$ initially

separated by a single jump discontinuity :

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0, \\ u_r, & x > 0. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Hayes and LeFloch [34, 36] considered weak solutions to the Riemann problem (in the class of piecewise Lipschitz continuous functions, say) associated with general systems with GNL, LD, or CC fields, and observed that solutions satisfying the single entropy inequality (3.1.2), are *not uniquely* determined by their initial data. In order to select a unique nonclassical solution to the Riemann problem, it is necessary to impose an additional selection criterion, called a *kinetic relation*, which selects, within a two-dimensional wave set, a unique wave curve associated with any state (in $\mathcal{B}(\delta_1)$ with $\delta_1 \leq \delta_0$, say). This selection criteria for the CC fields, together with the usual solutions for the GNL and LD fields, yields the *nonclassical Riemann solver*, as described in [34, 36].

Outline of this paper

In the present paper, we go beyond Hayes and LeFloch's construction and we introduce a new nonclassical Riemann solver for systems, referred to as the *nonclassical Riemann solver with kinetics and nucleation*. We investigate its properties, especially from the point of view of wave interactions. A main result established below is the existence of a large class of splitting-merging solutions containing one or two big (classical or nonclassical) waves, propagating within a background of small waves. In short, we will establish the following result : Consider the initial value problem associated with a strictly hyperbolic system (3.1.1) with GNL, LD, or CC fields. Suppose that the initial data is a perturbation of a large classical wave which splits into a nonclassical wave and a big classical. Then, there exists a globally defined in time solution with finitely many large waves. The two big waves can merge and, later on, split due to interactions between themselves or with small waves. In presence of the nucleation criterion, this splitting-merging phenomena only takes place finitely many times, but can continue forever if the nucleation criterion is removed.

An outline of this paper is as follows. In Section 2, we introduce our nonclassical Riemann solver with kinetics and nucleation. Section 3 contains the construction of the splitting-merging functional and presents our generalized wave strength and total variation functionals. Section 4 is devoted to showing that the nucleation condition implies that only finitely many splittings and mergings may occur.

3.2. NONCLASSICAL RIEMANN SOLVER WITH KINETICS AND NUCLEATION

3.2.1. Background and notation

Solutions to the Riemann problem are made of shock waves and rarefaction waves, and we will first introduce some basic notation relative to such waves.

A left-hand state u_- being fixed, we consider the Hugoniot set consisting of all right-hand states u_+ satisfying, for some λ , the condition $-\lambda(u_+ - u_-) + f(u_+) - f(u_-) = 0$. It is easily checked that there exist $\delta_1 < \delta_0$ and $\epsilon > 0$ such that for each $u_- \in \mathcal{B}(\delta_1)$ the following holds. The Hugoniot set can be decomposed into N curves $\mathcal{H}_i(u_-) = \left\{ v_i(s; u_-) / s \in (-\epsilon, \epsilon) \right\}$ ($1 \leq i \leq N$) depending smoothly on s and u_- , such that

$$v_i(s; u_-) = u_- + s r_i(u_-) + \frac{1}{2} s^2 (D r_i(u_-) r_i)(u_-) + O(s^3) \quad (3.2.1)$$

and, for the shock speed $\lambda = \bar{\lambda}_i(s; u_-)$,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(s; u_-) &= \lambda_i(u_-) + \frac{1}{2} s (\nabla \lambda_i \cdot r_i)(u_-) \\ &\quad + \frac{1}{6} s^2 \left((\nabla(\nabla \lambda_i \cdot r_i) \cdot r_i) + \frac{\nabla \lambda_i \cdot r_i}{2} l_i(D r_i r_i) \right)(u_-) + O(s^3). \end{aligned}$$

Rarefaction waves are Lipschitz continuous, self-similar solutions of (3.1.1), determined by integral curves of the vector fields r_i . It is easily checked that, for $\delta_1 < \delta_0$ and $\epsilon > 0$, and for all $u_- \in \mathcal{B}(\delta_1)$ the following holds. For each $i \in \{1, \dots, N\}$ the integral curve $\mathcal{O}_i(u_-) = \left\{ w_i(s; u_-) / s \in (-\epsilon, \epsilon) \right\}$ depends smoothly upon u_- and s and satisfies

$$w_i(s; u_-) = u_- + s r_i(u_-) + \frac{1}{2} s^2 (D r_i r_i)(u_-) + O(s^3) \quad (3.2.2)$$

and

$$\lambda_i(w_i(s; u_-)) = \lambda_i(u_-) + s (\nabla \lambda_i \cdot r_i)(u_-) + \frac{1}{2} s^2 (\nabla(\nabla \lambda_i \cdot r_i) \cdot r_i)(u_-) + O(s^3).$$

To ensure the uniqueness of the weak solution, we impose the entropy inequality (3.1.2) associated with a given strictly convex entropy pair (U, F) . For a shock wave connecting u_- to u_+ , the entropy inequality imposes that the rate of entropy dissipation be non-positive, i.e.

$$E(u_-, u_+) := -\lambda(U(u_+) - U(u_-)) + F(u_+) - F(u_-) \leq 0. \quad (3.2.3)$$

Hence, we have a constraint on the sign of the entropy dissipation $\overline{E}(s; u_-) := E(u_-, v_i(s; u_-))$ along the i -Hugoniot curve issuing from u_- . In fact, one has

$$\overline{E}(s; u_-) = \frac{s^3}{12} \left(r_i^T D^2 U r_i \right) (u_-) \left(\nabla \lambda_i \cdot r_i \right) (u_-) + O(s^4). \quad (3.2.4)$$

Recalling Lax shock inequalities

$$\lambda_i(u_-) \geq \lambda \geq \lambda_i(u_+) \quad (3.2.5)$$

for a shock wave connecting u_- to u_+ at the speed λ , we state the following standard result about genuinely nonlinear fields. Consider the i -Hugoniot curve $s \mapsto u_+ = v_i(s; u_-)$ issuing from a state u_- and associated with a genuinely nonlinear family. Then, the shock speed $s \mapsto \overline{\lambda}_i(s; u_-)$ is an increasing function of s , and Lax shock inequalities are equivalent to imposing the entropy inequality (3.2.3) and select the part $s < 0$ of the Hugoniot curve. Both inequalities above are violated for $s > 0$. The composite curve $\mathcal{W}_i(u_-) := \mathcal{S}_i(u_-) \cup \mathcal{O}_i(u_-)$, called the i -wave curve issuing from u_- , is defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i(u_-) &= \mathcal{S}_i(u_-) \cup \mathcal{O}_i(u_-) =: \left\{ \psi_i(s; u_-) / s \in (-\epsilon, \epsilon) \right\}, \\ \psi_i(s; u_-) &= \begin{cases} v_i(s; u_-), & s \in (-\epsilon, 0], \\ w_i(s; u_-), & s \in [0, \epsilon). \end{cases} \end{aligned}$$

The mapping $\psi_i : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{B}(\delta_1) \rightarrow \mathbb{R}^N$ admits continuous derivatives up to second-order and bounded third-order derivatives in s and u_- , with

$$\psi_i(s; u_-) = u_- + s r_i(u_-) + \frac{1}{2} s^2 (D r_i r_i)(u_-) + O(s^3).$$

3.2.2. Construction based on Lax shock inequalities

We now turn our attention to the characteristic fields that are not globally genuinely nonlinear and such that genuine nonlinearity condition fails at one point along each wave curve. In this case, the Lax shock inequalities (3.2.5) still single out a unique Riemann solution, but the entropy inequality (3.2.3) is no longer sufficiently discriminating in itself (as we will discuss in the following subsection). It is convenient now to use a global parameter defined below.

We now assume that the scalar-valued function $m_j(u) := \nabla \lambda_j(u) \cdot r_j(u)$ does not keep a constant sign and that $\mathcal{M}_j = \{u \in \mathcal{U} \mid m_j(u) = 0\}$ is a smooth affine manifold with dimension $N - 1$ such that the vector field r_j is *transverse to the manifold* \mathcal{M}_j and that

$$\text{Concave-convex (CC) field : } \nabla m_j(u) \cdot r_j(u) > 0, \quad u \in \mathcal{U}.$$

The transversality assumption above implies that the wave speed λ_j has one critical point (a minimum) along each wave curve, that is, $\nabla \lambda_j(u) \cdot r_j(u) = 0$ if and only if $m_j(u) = 0$.

We assume that $\mathcal{M}_j \cap \mathcal{B}(\delta_1) \neq \emptyset$ so that the problem does not reduce to the genuinely nonlinear case. To parametrize the Hugoniot curves $\mathcal{H}_j(u_-) = \{v_j(m; u_-)\}$ and integral curves $\mathcal{O}_j(u_-) = \{w_j(m; u_-)\}$, we introduce a global parameter $\mu_j(u) \in \mathbb{R}$ which depends smoothly upon u and is strictly monotone along the wave curves, specifically

$$\nabla \mu_j(u) \cdot r_j(u) \neq 0, \quad u \in \mathcal{B}(\delta_0)$$

and

$$\mu_j(u) = 0 \quad \text{if and only if} \quad m_j(u) = 0.$$

The obvious choice is to set the parameter μ_j now coincides with the parameter m_j , that is,

$$\mu_j(v_j(m; u_-)) = m, \text{ for } m \leq m_j(u_-), \quad \mu_j(w_j(m; u_-)) = m, \text{ for } m \geq m_j(u_-). \quad (3.2.6)$$

From now on we consider a concave-convex field $j \in J_3$ and we restrict attention to shocks that satisfy Lax shock inequalities. Let u_- be a state with $\mu_j(u_-) > 0$ and we consider the integral and Hugoniot curves.

Lemma 3.2.1 (Characteristic speed along the integral curve). *The j -characteristic speed along the integral curve $m \mapsto \lambda_j(w_j(m; u_-))$ is a strictly convex function of m which achieves its minimum value at $m = 0$. In particular, it is decreasing for $m < 0$ and increasing for $m > 0$.*

The part of the classical wave curve $\mathcal{W}_j^c(u_-)$ associated with rarefaction waves is the part $m \geq \mu_j(u_-)$ of the integral curve $\mathcal{O}_j(u_-)$.

Lemma 3.2.2 (Characteristic speed and shock speed along the Hugoniot curve). *The j -characteristic speed along the Hugoniot curve $m \mapsto \lambda_j(v_j(m; u_-))$ is a strictly convex function. On the other hand, the j -shock speed along the Hugoniot curve*

$$m \mapsto \bar{\lambda}_j(m; u_-) := \bar{\lambda}_j(u_-, v_j(m; u_-))$$

is a strictly convex function, which is either globally increasing or else achieves a minimum value at a point, denoted by $\mu_j^{\sharp}(u_-)$. At this critical value, the characteristic speed and the shock speed coincide :

$$\bar{\lambda}_j(m; u_-) = \lambda_j(v_j(m; u_-)) \quad \text{at } m = \mu_j^{\sharp}(u_-)$$

and, for some smooth function $e = e(u_-) > 0$,

$$\partial_m v_j(\mu_j^{\natural}(u_-); u_-) = e(u_-) r_j(v_j(\mu_j^{\natural}(u_-); u_-)).$$

For definiteness, from now on we assume that the shock speed does admit a minimum value, that is to say that $v_j(\mu_j^{\natural}(u_-), u_-) \in \mathcal{B}(\delta_1)$. The characteristic speed and the shock speed satisfy

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_j(m; u_-) - \lambda_j(v_j(m; u_-)) &> 0, \quad m \in (\mu_j^{\natural}(u_-), \mu_j(u_-)), \\ \bar{\lambda}_j(m; u_-) - \lambda_j(v_j(m; u_-)) &< 0, \quad m < \mu_j^{\natural}(u_-) \text{ or } m > \mu_j(u_-). \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1 (Classical wave curves). *There exists $\delta_1 < \delta_0$ and $\epsilon > 0$ with the following property. For $j \in J_3$, $u_- \in \mathcal{B}(\delta_1)$ and $\mu_j(u_-) > 0$, the j -wave curve of right-hand states connected to u_- by a combination of j -elementary waves satisfying Lax shock inequalities is composed of the following three pieces, see Figure 3.1 :*

$$\mathcal{W}_j^c(u_-) = \begin{cases} \mathcal{O}_j(u_-), & \mu_j(u) \geq \mu_j(u_-), \\ \mathcal{H}_j(u_-), & \mu_j^{\natural}(u_-) \leq \mu_j(u) \leq \mu_j(u_-), \\ \mathcal{O}_j(u_-^{\natural}), & \mu_j(u) \leq \mu_j^{\natural}(u_-). \end{cases}$$

where $u_-^{\natural} := v_j(\mu_j^{\natural}(u_-); u_-)$. It is continuously differentiable with bounded second-order derivatives in m and u_- and satisfies

$$\psi_j(m; u_-) = u_- + \frac{m - \mu_j(u_-)}{(\nabla \mu_j \cdot r_j)(u_-)} r_j(u_-) + O(m - \mu_j(u_-))^2.$$

The second-order derivatives of wave curves for non-genuinely nonlinear fields are not continuous, in general.

3.2.3. Nonclassical wave sets based on a single entropy inequality

This section generalizes Hayes-LeFloch's construction [34, 36] of a nonclassical Riemann solver based on a kinetic function and presents our new Riemann solver based on, both, kinetics and nucleation.

We now investigate the consequences of a single entropy inequality for the solutions of the Riemann problem. A shock wave is called a *nonclassical shock* if it satisfies the single entropy inequality (3.2.3) but not Lax shock inequalities (3.2.5). It is called a *classical shock* if both (3.2.3) and (3.2.5) hold. Before imposing any entropy condition at this stage, we have that a j -shock wave connecting a left-hand state u_- to a right-hand state u_+ can be, see Figure 3.2 :

- (1) a *Lax shock*, satisfying $\lambda_j(u_-) \geq \bar{\lambda}_j(u_-, u_+) \geq \lambda_j(u_+)$,
- (2) a *slow undercompressive shock* : $\bar{\lambda}_j(u_-, u_+) \leq \min(\lambda_j(u_-), \lambda_j(u_+))$,

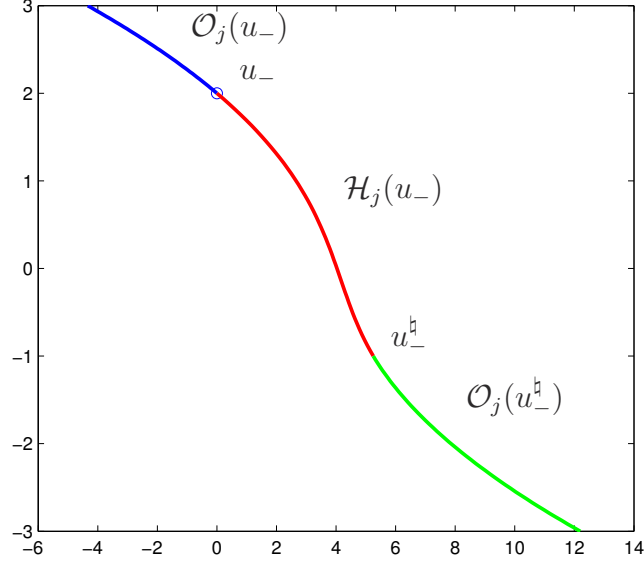


FIGURE 3.1. Classical wave curves

(3) a *fast undercompressive shock* : $\bar{\lambda}_j(u_-, u_+) \geq \max(\lambda_j(u_-), \lambda_j(u_+))$,

(4) or a *rarefaction shock* : $\lambda_j(u_-) < \bar{\lambda}_j(u_-, u_+) < \lambda_j(u_+)$.

Let u_- be such that $\mu_j(u_-) > 0$ and denote by $\mu_j^{-h}(u_-)$ the point of $\mathcal{H}_j(u_-)$ such that

$$\bar{\lambda}_j(\mu_j^{-h}(u_-); u_-) = \lambda_j(u_-), \quad \mu_j^{-h}(u_-) < \mu_j^h(u_-), \quad (3.2.7)$$

whenever such a point exists. For simplicity in the presentation we assume that both points $u_-^h := \mu_j^h(u_-)$ and $u_-^{-h} := \mu_j^{-h}(u_-)$ belong to $\mathcal{B}(\delta_1)$, since the present discussion would be much simpler otherwise. Note also that the shock wave connecting u_- to u_-^h is a *right-contact*, while the shock connecting u_- to u_-^{-h} is a *left-contact*.

Note also that the function μ_j^h depends smoothly upon its argument, and

$$\nabla \mu_j^h \cdot r_j \sim -\frac{1}{2} \nabla \mu_j \cdot r_j \quad \text{near the manifold } \mathcal{M}_j, \quad (3.2.8)$$

as established in [46]. In particular, (3.2.8) implies that $\mu_j^h < 0$. Let u_- be given with $\mu_j(u_-) \geq 0$ and consider a point u_+ on the Hugoniot curve $\mathcal{H}_j(u_-)$, say $u_+ = v_j(m; u_-)$ with $m = \mu_j(u_+)$. It can be checked that the shock is

- a rarefaction shock if $m > \mu_j(u_-)$ or $m < \mu_j^{-h}(u_-)$,
- a Lax shock if $m \in [\mu_j^h(u_-), \mu_j(u_-)]$,
- an undercompressive shock if $m \in [\mu_j^{-h}(u_-), \mu_j^h(u_-)]$.

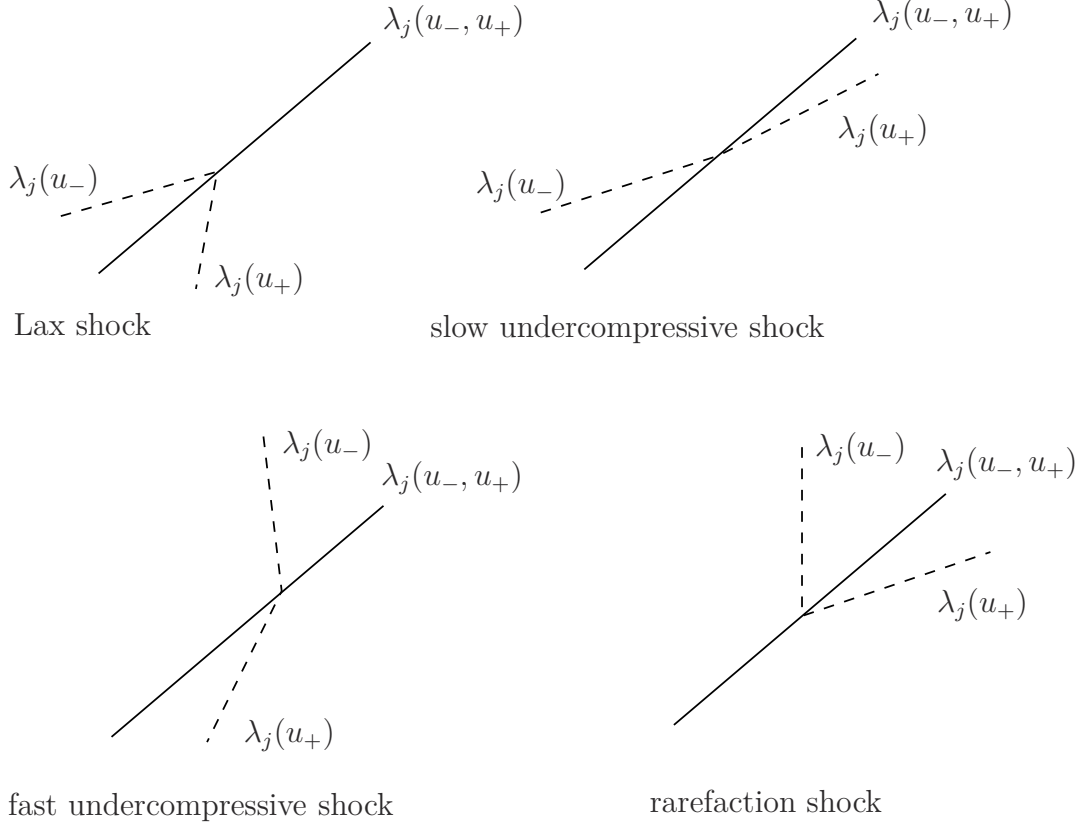


FIGURE 3.2. Classification of a j -shock wave connecting a left-hand state u_- to a right-hand state u_+

Lemme 3.2.3 (Entropy dissipation along the Hugoniot curve).

- (i) The entropy dissipation $\overline{E}(m; u_-) := E(u_-, v_j(m; u_-))$ vanishes at $\mu_j(u_-)$ and at a point

$$\mu_{j0}^b(u_-) \in (\mu_j^{-b}(u_-), \mu_j^b(u_-)).$$

The entropy dissipation is decreasing for $m < \mu_j^b(u_-)$, increasing for $m > \mu_j^b(u_-)$, and achieves a negative maximum value at the critical point of the wave speed $\mu_j^b(u_-)$, Figure 3.3.

- (ii) A shock satisfying the entropy inequality (3.2.3) cannot be a rarefaction shock. A nonclassical shock is undercompressive and satisfies

$$m \in (\mu_{j0}^b(u_-), \mu_j^b(u_-)).$$

- (iii) Any shock satisfying Lax shock inequalities also satisfies the entropy inequality (3.2.3).

We refer to μ_{j0}^b as the zero-entropy dissipation function associated with the j -characteristic field. In view of Lemma 3.2.3 we can also define the companion

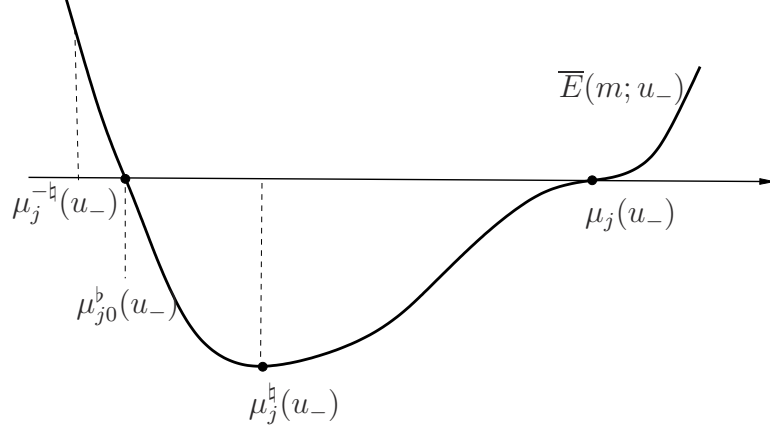


FIGURE 3.3. Entropy dissipation along the Hugoniot curve.

function μ_{j0}^\sharp by

$$\mu_{j0}^b(u_-) < \mu_j^\sharp(u_-) < \mu_{j0}^\sharp(u_-), \quad \overline{\lambda}_j(\mu_{j0}^\sharp(u_-); u_-) = \overline{\lambda}_j(\mu_{j0}^b(u_-); u_-).$$

It can be checked by the implicit function theorem that μ_{j0}^b and μ_{j0}^\sharp are at least as smooth as f, F and U .

Given u_- , we will also denote by $\Phi_{j0}^b(u_-)$, $\Phi_j^\sharp(u_-)$, and $\Phi_j^\sharp(u_-)$ on the shock curve $\mathcal{H}_j(u_-)$ the states with coordinates $\mu_{j0}^b(u_-)$, $\mu_j^\sharp(u_-)$, and $\mu_j^\sharp(u_-)$, respectively. It is a fundamental identity of the theory that the second iterate of the map Φ_{j0}^b is the identity map id [46], that is,

$$\Phi_{j0}^b \circ \Phi_{j0}^b = id. \quad (3.2.9)$$

Given a left-hand state u_- , the set of all states that can be reached using only j -waves is called the *nonclassical j -wave set issuing from u_-* and denoted by $\mathcal{X}_j(u_-)$.

Proposition 3.2.2 (Nonclassical wave set). *In addition to the classical one, the j -wave fan may contain a nonclassical j -shock connecting u_- to some intermediate state $u_+ \in \mathcal{H}_j(u_-)$ with $\mu_j(u_+) \in [\mu_{j0}^b(u_-), \mu_j^\sharp(u_-)]$ followed by*

- (a) *either a non-attached rarefaction connecting u_+ to $u \in \mathcal{O}_j(u_+)$ if $\mu_j(u) < \mu_j(u_+)$,*
- (b) *or by a classical shock connecting u_+ to $u \in \mathcal{H}_j(u_+)$ if $\mu_j(u) > \mu_j(u_+)$.*

This defines a two-parameter family of right-hand states u which can be reached from u_- by nonclassical solutions.

3.2.4. Kinetic relation and nucleation criterion

The nonclassical wave set $\mathcal{X}_j(u_-)$ is a two-dimensional manifold within which we will select the nonclassical wave curve $\mathcal{W}_j^{nc}(u_-)$. One parameter should be

prescribed for each wave family in J_3 , and we postulate that for all u_- a *single* right-hand state u_+ can be reached from u_- across a nonclassical shock.

For each concave-convex family j , a *kinetic function* for the j -characteristic field is a Lipschitz continuous mapping $\mu_j^b : \mathcal{B}(\delta_1) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying

$$\begin{aligned} \mu_{j0}^b(u) &< \mu_j^b(u) \leq \mu_j^\sharp(u), & \mu_j(u) > 0, \\ \mu_j^\sharp(u) &\leq \mu_j^b(u) < \mu_{j0}^b(u), & \mu_j(u) < 0. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

We impose the following *kinetic relation* : for every j -nonclassical shock the right-hand state u_+ is determined from the left-hand state u_- by

$$u_+ = u_-^b := v_j(m_-^b; u_-), \quad m_-^b = \mu_j^b(u_-). \quad (3.2.11)$$

To the kinetic function we shall associate its companion function μ_j^\sharp by

$$\bar{\lambda}_j(u_-, u_-^\sharp) = \bar{\lambda}_j(u_-, u_-^b), \quad u_-^\sharp := v_j(\mu_j^\sharp(u_-); u_-). \quad (3.2.12)$$

It can be checked that the map μ_j^\sharp depends Lipschitz continuously upon its argument and

$$\begin{aligned} \mu_j^\sharp(u) &\leq \mu_j^\sharp(u) < \mu_j(u), & \mu_j(u) > 0, \\ \mu_j(u) &< \mu_j^\sharp(u) \leq \mu_j^\sharp(u), & \mu_j(u) < 0. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

In the present paper, we need one additional map which allows us to select between the classical and the nonclassical construction of the wave fans. We introduce a Lipschitz continuous, *nucleation threshold* function μ_j^n associated with the kinetic function and satisfying

$$\begin{aligned} \mu_j^\sharp(u_-) &\leq \mu_j^n(u_-) \leq \mu_j^\sharp(u_-) & \text{when } \mu_j(u_-) \geq 0, \\ \mu_j^\sharp(u_-) &\leq \mu_j^n(u_+) \leq \mu_j^\sharp(u_-) & \text{when } \mu_j(u_-) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

The nucleation criterion is stated in the following way :

For $|\mu_j(u_-) - \mu_j(u_+)| < |\mu_j(u_-) - \mu_j^n(u_-)|$, classical j -shocks are always preferred, whenever they are available.

$$(3.2.15)$$

When $\mu_j^n(u_-) = \mu_j^\sharp(u_-)$, then the nucleation criteria is superfluous.

The Riemann solver with kinetics and nucleation is defined as the solution to the Riemann problem that satisfies the entropy inequality, the kinetic relation, and the nucleation criterion. In other words, a large initial jump always “nucleates” and produces a nonclassical shock wave. This is consistent with observations made in phase transition dynamics, especially in material science where nucleations in austenite-martensite transformations are observed [2].

Théorème 3.2.1 (Nonclassical Riemann solver with kinetics and nucleation). *Suppose that all fields of the strictly hyperbolic system (3.1.1) are genuinely nonlinear, linearly degenerate, or concave-convex.*

- (1) *Consider a concave-convex field $j \in J_3$ and fix a Lipschitz continuous, kinetic function μ_j^b satisfying (3.2.10). Then, for each $u_- \in \mathcal{B}(\delta_1)$ the kinetic relation (3.2.11) and the nucleation criterion (3.2.14) select a unique nonclassical j -wave curve $\mathcal{W}_j^{nc}(u_-)$ within the nonclassical wave set $\mathcal{X}_j(u_-)$. When $\mu_j(u_-) > 0$ it is composed of the following two connected components :*

$$\mathcal{W}_j^{nc}(u_-) = \begin{cases} \mathcal{O}_j(u_-), & \mu_j(u) \geq \mu_j(u_-), \\ \mathcal{H}_j(u_-), & \mu_j^n(u_-) \leq \mu_j(u) \leq \mu_j(u_-), \\ \mathcal{H}_j(u_-^b), & \mu_j^b(u_-) \leq \mu_j(u) < \mu_j^\sharp(u_-), \\ \mathcal{O}_j(u_-^b), & \mu_j(u) \leq \mu_j^b(u_-), \end{cases}$$

where $u_-^b := v_j(\mu_j^b(u_-); u_-)$. The Riemann solution is a single rarefaction shock, or a single classical shock, or a nonclassical shock followed by a classical shock, or finally a nonclassical shock followed by a rarefaction, respectively. Each connected component of $\mathcal{W}_j^{nc}(u_-)$ is a continuous and monotone curve in the parameter $m = \mu_j(u)$. When $\mu_j^n(u_-) = \mu_j^\sharp(u_-)$, it has bounded second-order derivatives for all $m \neq \mu_j^\sharp(u_-)$ and is Lipschitz continuous (at least) at $m = \mu_j^\sharp(u_-)$.

- (2) *For all u_l and u_r in $\mathcal{B}(\delta_1)$ the Riemann problem (3.1.1) and (3.1.2) admits a unique solution satisfying a single entropy inequality, the kinetic relation, and the nucleation criterion, which is determined by the intersection of the classical wave curves \mathcal{W}_j^c for genuinely nonlinear fields and the nonclassical wave curves \mathcal{W}_j^{nc} for concave-convex fields j . The solution is a self-similar solution made of $N + 1$ constant states*

$$u_l = u^0, u^1, \dots, u^N = u_r$$

separated by j wave fans. The intermediate constant states satisfy

$$u^j \in \mathcal{W}_j(u^{j-1}), \quad u^j = \psi_j(m_j; u^{j-1}),$$

with $m_j := \mu_j(u^{j-1})$, and are connected with combination of classical or nonclassical waves.

We recover the classical wave curve $\mathcal{W}_j^c(u_-)$ with the trivial choice $\mu_j^b \equiv \mu^n \equiv \mu_j^\sharp$. Observe that, contrary to the scalar case, the curve $\mathcal{H}_j(u_-^b)$ is continued up to the value $\mu_j^\sharp(u_-)$, since the intersection with a wave curve from another family

(which enters in the construction of the Riemann solution) may generate a point u which has $\mu_j(u) > \mu_j^n(u_-)$, while the intersection of the classical curve $\mathcal{H}_j(u_-)$ (with $\mu_j^n(u_-) \leq \mu_j(u) \leq \mu_j(u_-)$) is empty.

It is natural to ask about the physical relevance of the proposed hyperbolic theory with kinetics and nucleation. It is expected that the nucleation criterion is required when instabilities (one-wave/two-wave patterns) are observed numerically or in regularization involving competition between viscosity, capillarity, or relaxation effects. It is conceivable that the nucleation function (as is the case for the kinetic relation) could be determined *numerically* within a range where both classical and nonclassical behaviors co-exist. Applications should be sought in phase transition dynamics, thin film dynamics, and Camassa-Holm-type models.

3.3. SPLITTING-MERGING PATTERNS WITH KINETICS AND NUCLEATION

3.3.1. Objectives and notation

In the case that the nucleation threshold is chosen to coincide with the critical value determined by the kinetic mapping, the nonclassical Riemann solution constructed in the previous section depends continuously in the L^1 norm upon its initial data, but not so in a pointwise sense. Observe that, along a nonclassical wave curve, the speeds of the (rarefaction or shock) waves change continuously since

$$\lim_{m \rightarrow \mu_j^\# -} \lambda_j(v_j(m, u_-)) = \lim_{m \rightarrow \mu_j^\# +} \lambda_j(v_j(m, u_-^b)),$$

and

$$\lim_{m \rightarrow \mu_j^b -} \lambda_j(w_j(m, u_-^b)) = \lim_{m \rightarrow \mu_j^b +} \lambda_j(v_j(m, u_-^b)).$$

However, at $\mu_j^\#(u_-)$, one has to compare the shock speed of the classical shock with the shock speeds of the nonclassical and classical shocks. The wave speeds (only) are continuous but the total variation of the nonclassical Riemann solution is *not* a continuous function of its end points. This lack of continuity makes it delicate to control the strengths of waves at interactions. This motivates the study made in the present section which covers general nucleation thresholds, including the “trivial” choice.

We consider three distinct states u_* , $u_*^\#$, and u_*^b associated with a given wave family (say $i \in J_3$), so that u_* can be connected to $u_*^\#$ by a classical shock (denoted by C_*^\downarrow), u_* can be connected to u_*^b by a nonclassical shock (denoted by N_*), and u_*^b can be connected to $u_*^\#$ by a classical shock (denoted by C_*^\uparrow); moreover, we

assume that all three speeds coincide, that is,

$$\bar{\lambda}_i(u_*, u_*^\sharp) = \bar{\lambda}_i(u_*, u_*^\flat) = \bar{\lambda}_i(u_*^\flat, u_*^\sharp) =: \bar{\lambda}_*. \quad (3.3.1)$$

Such a structure is directly determined by the kinetic relation that was prescribed in Section 3.2.

Définition 3.3.1. *The triplet $(u_*, u_*^\sharp, u_*^\flat)$ satisfying the condition above is called a classical–nonclassical three state pattern.*

The nonclassical shock is stable by perturbation in the phase space, in the sense that for every u in a sufficiently small neighborhood of u_* there exists a state $u^\flat \in \mathcal{H}_i(u)$ which lies in a small neighborhood of u_*^\flat and still satisfies the kinetic relation. The classical shock connecting u_*^\flat to u_*^\sharp is also stable in the same manner. However, the classical shock connecting u_* to u_*^\sharp is *not a stable structure* when its end points are perturbed. Actually, depending upon the size of the perturbation and the difference $\mu_i^\sharp(u_*) - \mu_i^n(u_*)$, the shock connecting u_* to u_*^\sharp may either keep its structure, or else transform into a perturbation N_*^\downarrow of the nonclassical shock N_*^\downarrow , plus a perturbation C_*^\uparrow of the classical shock C_*^\uparrow .

Following LeFloch and Shearer [48], we are interested here in the effect of adding a perturbation to this double wave structure and establishing a global–in–time stability result, when the perturbation has sufficiently small total variation. Indeed, we are going to establish the existence of a large class of solutions undergoing repeated splitting and merging, whose global structure at each time consists of a single shock or a double-shock structure plus small waves. As was the case for scalar conservation laws, we will see that the splitting/merging feature can take place infinitely many times when the nucleation function coincides with the kinetic function but only finitely many times when a non-trivial nucleation criterion is selected. The analysis for systems is much more involved, since now interactions between different wave families may take place and even interactions between waves of the same family may contribute to increase the wave strengths.

The analysis of hyperbolic systems of conservation laws, since the work of Glimm [30], proceeds by constructing an approximation within a simple class of solutions in which all waves, in particular rarefactions, are localized to a point. Following the new standard ansatz of front-tracking approximations [11, 68], Figure 3.4, it suffices to construct piecewise constant approximations u_h in space with a finite number of discontinuities which depend on a small parameter h , and for which the initial data u_0 converge in the TV norm in space and in $L^1(\mathbb{R})$ to the initial data as h converges to zero. The main argument is then to show that the sequence of approximations satisfy the hypothesis of Helley’s theorem. For these reasons, the analysis in the rest of the paper will suppose the *solution*,

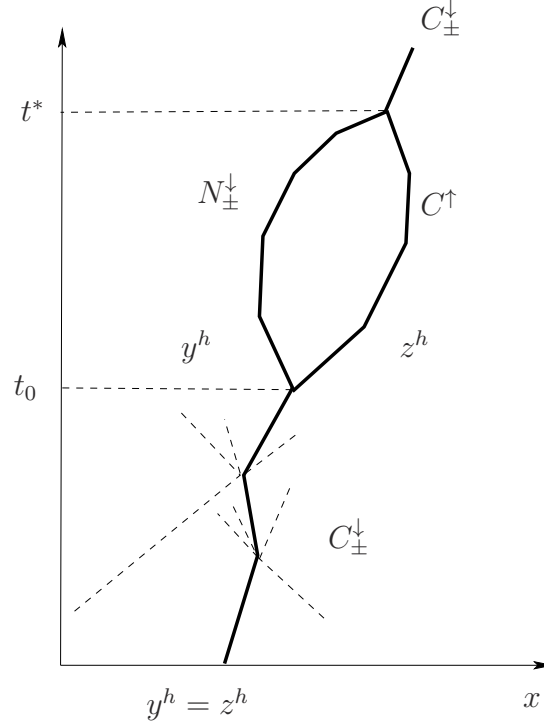


FIGURE 3.4. Front-tracking approximations.

denoted $u_h = u_h(t, x)$, is in fact a front-tracking approximation, i.e. a piecewise constant approximation with discontinuities connecting states along waves, all up to a small error in $L^\infty(\text{TV}) \cap L^1(\mathbb{R} \times [0, T])$. Usually, the dependence h will be implicit and the front-tracking approximation will simply be denoted by u .

The front-tracking approximation u we construct possesses initial data that is also piecewise constant. Given the state u_* consider initial data $u(x, 0) = u_0(x)$ having the following specific structure :

$$u_0(x) = \bar{u}_0(x) + v_0(x), \quad (3.3.2)$$

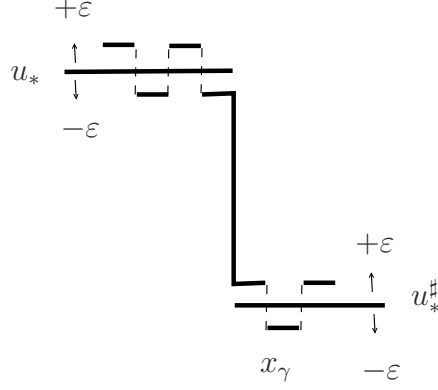
where

$$\bar{u}_0(x) := \begin{cases} u_*, & x < 0, \\ u_*^n, & x > 0. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

We assume that the small perturbation v_0 is piecewise constant, formed of a collection of discontinuities $\gamma \in \mathcal{D}_0$ located at x_γ , Figure ??, and of small total variation :

$$\epsilon > \text{TV}(v_0) := \sum_{\gamma \in \mathcal{D}_0} |v_0(x_\gamma +) - v_0(x_\gamma -)|. \quad (3.3.4)$$

The total variation above uses the euclidean distance between the states in phase-space to measure the strength of the discontinuity. The strength of the large

FIGURE 3.5. Initial data $u(x, 0) = u_0(x)$.

unperturbed shock $|u_*^n - u_*|$ provides a first length scale, the size of the perturbation ϵ provides a second, but smaller, length scale, and the nucleation criteria provides the third and final length scale

$$\eta := \mu_i^\sharp(u_*) - \mu_i^n(u_*), \quad (3.3.5)$$

which we also assume to be the smallest of all three scales. Note that \bar{u}_0 is a single step function which admits two distinct Riemann solutions $\bar{u} = \bar{u}(t, x)$ made of admissible waves. We remark that if $\bar{u}_0 = 0$, then taking v_0 small might not permit the existence of nonclassical shock because the diffusion dispersion ratio might be larger than v_0 . As we will see later, there exists a relation between the length scale η and the length scale ϵ .

For instance, if the perturbation v_0 is simply chosen to be a single step function having a jump discontinuity located at $x = 0$ and connecting 0 (say) to v_0^+ , then one just need to solve a Riemann problem with left-hand state u_* and right-hand state $u_*^n + v_0^+$. In view of the properties of the nonclassical Riemann solver (Section 2), we can find a cone \mathcal{A} centered at the point u_*^n such that :

- If $\mu_i(u_*^n + v_0^+) > \mu_i(u_*^n)$ and $u_*^n + v_0^+ \in \mathcal{A}$ then the Riemann solution contains a single big shock C^\downarrow plus small waves in all families.
- If $\mu_i(u_*^n + v_0^+) < \mu_i(u_*^n)$ and $u_*^n + v_0^+ \in \mathcal{A}$ the Riemann solution contains a big nonclassical shock N^\downarrow plus a faster big classical shock C^\uparrow plus small waves in other families $j \neq i$.
- When $u_*^n + v_0^+ \notin \mathcal{A}$ either one of the above behaviors may be observed.

3.3.2. Generalized wave strength and interaction patterns

Waves will be measured by a *generalized strength* which extends the earlier definitions for scalar equations [46, 48, 42]. For every concave-convex family indexed i , we propose here to use the zero-dissipation map Φ_{i0}^\flat and identify any

state in the $\mu_i < 0$ region to a state in the $\mu_i > 0$ region. Precisely, we introduce the map

$$\widetilde{\Phi_{i0}^b}(u) = \begin{cases} u & \text{if } \mu_i(u) > 0, \\ \Phi_{i0}^b(u) & \text{if } \mu_i(u) < 0. \end{cases}$$

Définition 3.3.2. *The signed strength of a wave joining states u_- and u_+ in a concave-convex family indexed i is measured by*

$$\sigma(u_-, u_+) = \mu_i(\widetilde{\Phi_{i0}^b}(u_+)) - \mu_i(\widetilde{\Phi_{i0}^b}(u_-)).$$

In other words, we have

$$\sigma(u_-, u_+) = \begin{cases} \mu_i(u_+) - \mu_i(u_-) & \text{if } \mu_i(u_-), \mu_i(u_+) > 0, \\ \mu_i(\Phi_{i0}^b(u_+)) - \mu_i(u_-) & \text{if } \mu_i(u_+) \leq 0 < \mu_i(u_-), \\ \mu_i(u_+) - \mu_i(\Phi_{i0}^b(u_-)) & \text{if } \mu_i(u_-) \leq 0 < \mu_i(u_+), \\ \mu_i(\Phi_{i0}^b(u_+)) - \mu_i(\Phi_{i0}^b(u_-)) & \text{if } \mu_i(u_-), \mu_i(u_+) \leq 0. \end{cases}$$

This definition will be used for both strong and weak waves of the i -th family, that is the concave-convex family. In particular, for weak waves of the i -th family only the first and last cases above apply.

We can now summarize our assumptions on the kinetic map Φ_i^b for each concave-convex characteristic field, as follows :

- (H1) $\Phi_i^b(u) \in \mathcal{W}_i^{nc}(u)$ for all $u \in \mathcal{B}(\delta_1)$. Throughout, we always assume that $\delta_1 \leq \delta_0$ is small enough so that, for all $u \in \mathcal{B}(\delta_1)$, the two states $\Phi^\sharp(u)$ and $\Phi^b(u)$ are well-defined (and, of course, belong to $\mathcal{B}(\delta_0)$).
- (H2) $\Phi_i^b : \mathcal{B}(\delta_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ is Lipschitz continuous and one-to-one on its image.
- (H3) The restriction of Φ_i^b to the hypersurface \mathcal{M}_i is the identity map, and the function $s \mapsto \mu_i(\Phi_i^b(\psi_i(u; s)))$ is monotone decreasing for all $u \in \mathcal{B}(\delta_1)$, provided s satisfies $\psi_i(u; s) \in \mathcal{B}(\delta_1)$.
- (H4) There exists a constant $C_i \in (0, 1)$ such that $|\mu_i(\Phi_i^b \circ \Phi_i^b(u))| \leq C_i |\mu_i(u)|$ for all $u \in \mathcal{B}(\delta_1)$.

Lemme 3.3.1. *Under the conditions (H1)–(H4), the generalized shock strength satisfies the following properties :*

- *When the nucleation map Φ_i^n coincides with the map Φ_i^\sharp determined by the kinetic map, the generalized wave strength is continuous (up to perturbation due to small waves) when the two large waves combine together or when a classical shock splits.*
- *The generalized wave strength is equivalent to the standard wave strength.*

DÉMONSTRATION. It is sufficient to show that for every j -wave connecting two states u_-, u_+ , then there exists strictly positive constants c and C such that

$$c|\mu_j(u_+) - \mu_j(u_-)| \leq |\sigma(u_-, u_+)| \leq C|\mu_j(u_+) - \mu_j(u_-)|.$$

If $j \neq i$, that is if the wave does not belong to the same concave-convex family of the strong shock, then the definition of wave strength is the same as usual and there is nothing to show. Consider therefore the case with $j = i$ with $u_+ \in \mathcal{W}_i^{nc}(u_-)$. If both $\mu_i(u_-)$ and $\mu_i(u_+)$ are positive, then $|\sigma(u_-, u_+)| = |\mu_i(u_+) - \mu_i(u_-)|$ is the usual definition. If both $\mu_i(u_-)$ and $\mu_i(u_+)$ are negative, then because Φ_i^b is Lipschitz and one-to-one there exists c and C such that

$$c|\mu_i(u_+) - \mu_i(u_-)| \leq |\sigma(u_-, u_+)| = \left| \mu_i(\Phi_i^b(u_+)) - \mu_i(\Phi_i^b(u_-)) \right| \leq C|\mu_i(u_+) - \mu_i(u_-)|.$$

Consider now the last case where $\mu_i(u_-) > 0 > \mu_i(u_+)$. Given that Φ_i^b is monotone decreasing, clearly

$$\begin{aligned} |\sigma(u_-, u_+)| &= \left| \mu_i(\Phi_{i0}^b(u_+)) - \mu_i(u_-) \right| \\ &\geq \left| \mu_i(\Phi_{i0}^b \circ \Phi_i^\sharp(u_-)) - \mu_i(u_-) \right| \\ &\geq \left| \mu_i(\Phi_{i0}^b \circ \Phi_i^b(u_-)) - \mu_i(u_-) \right| \\ &\geq (1 - C_i) |\mu_i(u_-)|. \end{aligned}$$

The Lipschitz continuity of Φ_i^\sharp implies that there exists a constant, say m , such that

$$|\mu_i(u_-)| > m \left| \mu_i(\Phi_i^\sharp(u_-)) - \mu_i(u_-) \right|.$$

Since $\mu_i(\Phi_i^\sharp(u_-)) < \mu_i(u_+)$, this leads to

$$|\mu_i(u_-)| > m |\mu_i(u_+) - \mu_i(u_-)|,$$

which completes the proof of the required inequality. \square

We are now in a position to state our main result.

Définition 3.3.3. *A splitting–merging pattern is a nonclassical entropy solution to (3.1.1) which contains at most two big waves located at $y = y(t) \leq z = z(t)$ separated by small classical waves, so that at each time the solution contains either (i) only a single large classical shock, or (ii) a large nonclassical shock followed by a large classical shock.*

Théorème 3.3.1 (Nonlinear stability of splitting–merging patterns). *Given any strictly hyperbolic system (3.1.1) with genuinely nonlinear, linearly degenerate, or concave-convex characteristic families, consider a kinetic mapping Φ_i^b associated*

with concave-convex families (indexed by i), uniformly satisfying the conditions (H1)–(H4). Then, any two wave pattern $(u_*, \Phi_i^b(u_*), \Phi_i^\sharp(u_*))$ is globally-in-time nonlinearly stable, that is, for every perturbation with sufficiently small total variation there exists a global-in-time solution $u = u(t, x)$ to (3.1.1) which is a splitting–merging pattern satisfying the initial condition (3.3.2).

Théorème 3.3.2 (Nonlinear stability of splitting–merging patterns with arbitrarily small strength). *Given any strictly hyperbolic system (3.1.1) with genuinely nonlinear, linearly degenerate, or concave-convex characteristic families, there exist positive constants κ_* and $\delta_* < \delta_0$ depending only upon the flux function and the constant C_i arising in (H4), so that the following property hold : for every family of kinetic mappings Φ_i^b associated with concave-convex families (indexed by i), provided they satisfy the conditions (H1)–(H4), any two wave pattern $(u_*, \Phi_i^b(u_*), \Phi_i^\sharp(u_*)) \in \mathcal{B}(\delta_*)^3$ (made of a classical shock and a nonclassical shock) is globally-in-time nonlinearly stable, that is, for every perturbation with total variation $\epsilon < \kappa_* \delta_N$ at most, where δ_N is the strength of the unperturbed nonclassical shock, there exists a global-in-time solution $u = u(t, x)$ to (3.1.1) which is a splitting–merging pattern satisfying the initial condition (3.3.2).*

Observe that the above theorem applies to a broad class of kinetic functions and allows the strength of the classical/nonclassical pattern to have arbitrarily small strength, while the perturbation is allowed to be a small (but fixed) ratio of those waves.

3.3.3. Interaction estimates

In a splitting-merging solution, the three large waves $C^\downarrow, N_\pm^\downarrow, C^\uparrow$ play an important role and we identify the oft recurring strengths of the strong unperturbed but split waves $N_\pm^\downarrow, C^\uparrow$ as

$$\begin{aligned}\delta_N &= \left| \mu_i(u_*) - \mu_i(\Phi_{i0}^b \circ \Phi_i^b(u_*)) \right|, \\ \delta_C &= \left| \mu_i(\Phi_{i0}^b \circ \Phi_i^b(u_*)) - \mu_i(\Phi_{i0}^b \circ \Phi_i^\sharp(u_*)) \right|.\end{aligned}$$

In some situations, we will need to account for the dependence of these quantities on a left-hand state u_ℓ , and in those rare cases we will explicitly write $\delta_N(u_\ell)$ and $\delta_C(u_\ell)$, where the quantity is computed as above with u^* replaced by u_ℓ .

Using the above definitions of shock strength, we define $y^h(t)$ to be the position of either crossing wave, C_\pm^\downarrow or N_\pm^\downarrow , in the front-tracking approximations and, when C^\uparrow is present, we define $z^h(t)$ to be the position of C^\uparrow . When C^\uparrow doesn't appear, we assume $z^h = y^h$.

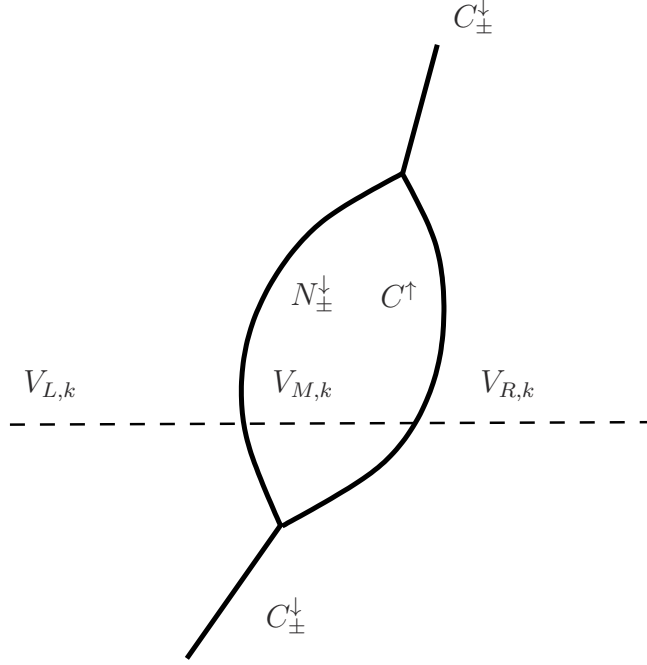


FIGURE 3.6. Functionals associated to specific families of waves.

The shock positions allow us to define three functionals, each associated to specific families of waves, as in Figure 3.6.

$$V_{L,k}(t) = \sum_{\substack{k\text{-waves} \\ x < y_h(t)}} \sigma_{k,x}, \quad V_{M,k}(t) = \sum_{\substack{k\text{-waves} \\ y^h(t) < x < z^h(t)}} \sigma_{k,x}, \quad V_{R,k}(t) = \sum_{\substack{k\text{-waves} \\ z^h(t) < x}} \sigma_{k,x}.$$

In practice, a linear combination of these measures of variation will be used. Assuming the strong waves belong to the i -th family of waves, then we introduce the positive constants $k_L, k_M, k_R, k_L^{\leq}, k_M^{\leq}$ and k_R^{\leq} , and the functionals

$$\begin{aligned} V_L(t) &= k_L V_{L,i}(t) + k_L^{\leq} \sum_{j < i} V_{L,j}(t) + k_L^{\geq} \sum_{j > i} V_{L,j}(t), \\ V_M(t) &= k_M V_{M,i}(t) + k_M^{\leq} \sum_{j < i} V_{M,j}(t) + k_M^{\geq} \sum_{j > i} V_{M,j}(t), \\ V_R(t) &= k_R V_{R,i}(t) + k_R^{\leq} \sum_{j < i} V_{R,j}(t) + k_R^{\geq} \sum_{j > i} V_{R,j}(t), \\ W(t) &= V_L(t) + V_R(t) + V_M(t). \end{aligned}$$

For convenience, we will also be writing $|\alpha| := \sigma(\alpha)$ and

$$\text{sign}(\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{if } \alpha \text{ is a shock,} \\ +1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

We will now describe a series of lemmas which quantify the changes in the functional W during the interactions presented in the last section. These results

will sometimes use the nomenclature presented in LeFloch [46], where the 16 possible non-classical interactions were given names. For example, the expression CR-4 was used to identify the 4-th type of interaction which may occur (under certain conditions) between a shock C on the left and a rarefaction R on the right. We begin with a statement of Glimm's well-known interaction estimates restricted to the set of interactions present in splitting-merging solutions.

We start by listing all possible wave interactions which may occur with a splitting-merging solution. All possible interactions in the systems case are, up to the generation of weak waves in families $i \neq j$, a subset of those which may be found in the scalar case and described in LeFloch's monograph [46]. Following the notation introduced there, let C and N denote respectively classical and nonclassical waves. Outgoing waves will be distinguished by a prime superscript, such as C' , and if waves connect states $u_- > u_+$ ($u_- < u_+$) then we will write C^\downarrow (C^\uparrow) depending on the type of wave. Sometimes, we may also include a subscript \pm (\mp) to indicate more precisely that a wave C_\pm (C_\mp) connects $u_- > 0 > u_+$ ($u_- < 0 < u_+$). Finally, lowercase greek letters, like α_i and β_j , will denote weak waves in respectively the i -th and j -th family.

Using the notation above, interactions involving two i -waves are the following.

Case 1. **Splitting of a big wave** : $C^\downarrow \alpha_i \rightarrow NC^\uparrow$ or $\alpha_i C^\downarrow \rightarrow NC^\uparrow$, Figure 3.7.

Case 2. **Merging of two big waves** : $NC^\uparrow \rightarrow C^\downarrow$, Figure 3.8.

Case 3. **Perturbation of a big classical wave** : $C\alpha_i \rightarrow C$ or $\alpha_i C \rightarrow C$ with $C = C_\pm^\downarrow, C^\uparrow$, Figure 3.9.

Case 4. **Perturbation of a big nonclassical wave** : $\alpha_i N \rightarrow N\alpha'_i$, Figure 3.9.

Secondly, interactions may involve a big i -wave and a small wave of another family, say for instance a smaller family $j < i$:

Case 5. **Splitting of a big wave** : $C^\downarrow \beta_j \rightarrow NC^\uparrow$ or $\beta_j C^\downarrow \rightarrow NC^\uparrow$, Figure 3.10.

Case 6. **Perturbation of a big nonclassical wave** : $N\beta_j \rightarrow \beta'_j N$, Figure 3.11.

Case 7. **Perturbation of a big classical wave** : $C\beta_j \rightarrow \beta'_j C$ or $\beta_j C \rightarrow C\beta'_j$ with $C = C_\pm^\downarrow, C^\uparrow$, Figure 3.12.

Théorème 3.3.3 (Glimm's interaction estimates for a nonclassical Riemann solver). *Consider a front-tracking approximation u such that for $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ the states $u(x, t)$ belong to $\mathcal{B}(\delta_1) \subset \mathbb{R}^n$. Suppose that an interaction occurs before time T between simple waves α and β whose solution to the Riemann problem is γ , then*

$$\alpha + \beta = \gamma + \mathcal{O}(|\alpha| \cdot |\beta|),$$

where the addition occurs between the vector of signed strengths of the wave components as described in Definition 3.3.2.

DÉMONSTRATION. The literature contains a few proofs of this result for interactions between classical waves [30, 74], but here we will adapt the proof found in the monograph by Smoller [74]. That proof proceeds in two steps. The first is to demonstrate the simpler quadratic estimate

$$\alpha + \beta = \gamma + \mathcal{O}\left(\left[|\alpha| + |\beta|\right]^2\right). \quad (3.3.6)$$

In the second part, they use the additivity of simple rarefaction waves to demonstrate inductively that the more accurate estimate holds. A careful analysis of the second part shows that the argument also applies to non-classical waves if the weaker estimate (3.3.6) still holds. Our objective will therefore be to demonstrate the weaker estimate for the new interactions present in a splitting-merging pattern. There are in fact 5 new interactions that need to be discussed, from among the interactions listed in the previous section, but the cases 1 and 4 are similar to the cases 5 and 6 respectively. For the sake of brevity, we will therefore only treat Cases 1, 2 and 4.

Some notation will be required. In the beginning of the proof, the strength of all waves will be measured in the traditional manner, i.e.

$$\bar{\sigma}(u_-, u_+) := \mu_i(u_+) - \mu_i(u_-).$$

This first part will demonstrate that the error term is quadratic and the second part will involve rewriting the linear part in terms of the new definition of wave strengths. All interactions will occur between two simple waves α and β , that is to say either shocks or rarefactions belonging each to a single family and separated by states u_ℓ, u_m and u_r going from left to right. The solution of the Riemann problem for these two incoming waves is described by the vector of signed strengths $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ and we will write $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ to recall the dependence on the incoming waves. Finally, we remark that the orientation of the eigenvectors of the Jacobian of f is normalized in such a way that it is oriented in the direction of the rarefaction curve. Unfortunately, when the wave curves cross the manifold \mathcal{M}_i , the direction of the eigenvectors is discontinuous. In order to exploit the continuity of the eigenvectors, we therefore modify their orientation in the region of $\mu_i(u) \leq 0$ so that they remain continuous across \mathcal{M}_i .

Case 1. ($C_\pm^\downarrow \alpha_i \rightarrow N' C^{\uparrow'}$ or $\alpha_i C_\pm^\downarrow \rightarrow N' C^{\uparrow'}$) Consider at time t a crossing shock C_\pm^\downarrow interacting with a weak wave α_i on the right belonging to the concave-convex family indexed i , and generating a nonclassical and a classical

shock pair $N_{\pm}^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$. For the incoming waves, we have two pure waves connecting respectively u_{ℓ}, u_m and u_m, u_r but sharing the common middle state u_m . Suppose $\delta_C^{\sharp} = |\overline{\sigma}(C^{\sharp}(u_{\ell}))|$ is the absolute value of the strength of the wave connecting u_{ℓ} to $\Phi_i^{\sharp}(u_{\ell}) := u_{\ell}^{\sharp}$, and that $\delta_N = |\overline{\sigma}(N(u_{\ell}))|$ is the strength of the wave connecting u_{ℓ} to $\Phi_i^{\flat}(u_{\ell}) := u_{\ell}^{\flat}$. This allows us to define the small (positive) parameter a such that $u_m = v_i(u_{\ell}, \delta_C^{\sharp} + a)$. Moreover, let b be the (positive) signed strength of the rarefaction wave connecting u_m to u_r . Suppose also that the wave vector $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ solves the outgoing Riemann problem connecting u_{ℓ} to u_r .

Using the differentiability through the wave curve $\mathcal{W}_i(u_{\ell})$ before the point u_{ℓ}^{\sharp} , we express the three incoming states u_{ℓ} , u_m , and u_r in terms of the left state u_{ℓ} and the strengths of the intermediate waves δ_C^{\sharp} , a , and b . Given that all states are inside $\mathcal{B}(\delta_0)$, we use the expansions (3.2.1) and (3.2.2) to write

$$u_m = u_{\ell} + (-\delta_C^{\sharp} + a)r_i(u_{\ell}) + \frac{1}{2}(-\delta_C^{\sharp} + a)^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_{\ell}) + \mathcal{O}(|-\delta_C^{\sharp} + a|^3), \quad (3.3.7)$$

$$u_r = u_m - b r_i(u_m) + \frac{1}{2}b^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_m) + \mathcal{O}(|b|^3). \quad (3.3.8)$$

Substituting the first equation into the second for u_m and simplifying leads to

$$u_r = u_{\ell} + (-\delta_C^{\sharp} + a - b)r_i(u_{\ell}) + \frac{1}{2}(-\delta_C^{\sharp} + a - b)^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_{\ell}) + \mathcal{O}(|-\delta_C^{\sharp} + a| + |b|)^3. \quad (3.3.9)$$

The parameters $-\delta_C^{\sharp} + a$ and $-b$ are both negative, and so the error term is simply $\mathcal{O}(|-\delta_C^{\sharp} + a - b|^3)$.

We also express the states neighbouring the outgoing waves by $u'_0 = u_{\ell}, u'_1, \dots, u'_n = u_r$ paying particular attention to the states neighbouring the i -waves, namely $u'_{\ell} := u'_{i-1}$, $u'_r := u'_i$ and $u'_m := \Phi_i^{\flat}(u'_{\ell})$ the intermediate state between $N_{\pm}^{\downarrow'}$ and $C^{\uparrow'}$. For simplicity, we will write $\delta'_N := |\overline{\sigma}(N(u'_{\ell}))|$ and $\delta'_C := |\overline{\sigma}(C(u'_{\ell}))|$. As points along the wave curves, these states are

$$\begin{aligned} u'_m &= v_i(u'_{\ell}, -\delta'_N(u'_{\ell})), \\ u'_r &= v_i(u'_m, \delta'_C(u'_{\ell}) - a'), \end{aligned}$$

where the small parameter a' is positive.

We write Taylor series expansions for these states

$$u'_m = u'_{\ell} - \delta'_N r_i(u'_{\ell}) + \frac{1}{2}\delta'^2_N r_i \cdot \nabla r_i(u'_{\ell}) + \mathcal{O}(|\delta'_N|^3), \quad (3.3.10)$$

$$u'_r = u'_m + (\delta'_C - a') r_i(u'_m) + \frac{1}{2}(\delta'_C - a')^2 r_i \cdot \nabla r_i(u'_m) + \mathcal{O}(|\delta'_C - a'|^3). \quad (3.3.11)$$

Substituting in for u'_m and simplifying gives

$$u'_r = u'_\ell + (-\delta'_N + \delta'_C - a') r_i(u'_\ell) + \frac{1}{2} (-\delta'_N + \delta'_C - a')^2 r_i \cdot \nabla r_i(u'_\ell) + \mathcal{O}\left(\left[|-\delta'_N| + |\delta'_C - a'|\right]^3\right). \quad (3.3.12)$$

In this case, the parameters $-\delta'_N$ and $\delta'_C - a'$ are respectively negative and positive, hence the error term is simply $\mathcal{O}(|-\delta'_N - \delta'_C + a'|^3)$.

The outgoing waves are written in terms of the strengths $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. To compare the incoming waves with the outgoing waves, we will consider separately the waves $\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}$ connecting u_ℓ to u'_ℓ , the nonclassical waves connecting u'_ℓ to u_r , and finally the waves $\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n$ connecting u'_r to u_r . The resulting combined expansion is

$$\begin{aligned} u_r = u_\ell &+ \sum_{k < i} \gamma_k r_k(u_\ell) + \mathcal{O}\left(\left[|\gamma_1| + \dots + |\gamma_{i-1}|\right]^2\right) \\ &+ (-\delta'_N + \delta'_C - a') r_i(u'_\ell) + \frac{1}{2} (-\delta'_N + \delta'_C - a')^2 r_i \cdot \nabla r_i(u'_\ell) + \mathcal{O}(|-\delta'_N + \delta'_C - a'|^3) \\ &+ \sum_{k > i} \gamma_k r_k(u'_r) + \mathcal{O}\left(\left[|\gamma_{i+1}| + \dots + |\gamma_n|\right]^2\right). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Equating the expressions (3.3.12) and (3.3.13), we obtain to first order vector identities between different bases, the first basis being $\mathcal{B} = \{r_1(u_\ell), \dots, r_n(u_\ell)\}$ and the second being

$$\mathcal{B}' = \{r_1(u_\ell), \dots, r_{i-1}(u_\ell), r_i(u'_\ell), r_{i+1}(u'_r), \dots, r_n(u'_r)\}.$$

We observe that if $a = b = 0$, then the interaction $C_\pm^\downarrow \rightarrow N' C^\uparrow$ does not introduce secondary waves, hence the continuity of the Riemann solver implies that $a' = \mathcal{O}(|a| + |b|)$. In this sense, a' is also a small parameter depending on a and b . Given that $a = b = 0$ implies that $u_\ell = u'_\ell$ and $u_r = u'_r$, then continuity of the Riemann solver also means that for $k \neq i$ the secondary waves satisfy $\gamma_k = \mathcal{O}(|a| + |b|)$. These simple estimates provide us with

$$r_i(u'_\ell) = r_i(u_\ell) + \mathcal{O}(|a| + |b|), \text{ and } r_i(u'_r) = r_i(u_r) + \mathcal{O}(|a| + |b|).$$

Returning to the change of basis from \mathcal{B} to \mathcal{B}' , we see that the change of basis matrix is given by

$$I + A \text{ where } A = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathcal{O}(|a| + |b|)}{\mathcal{O}(|a| + |b|)} \end{bmatrix}.$$

The first $i - 1$ rows of the perturbation are zero, the i -th row is of the form $\mathcal{O}(|a| + |b|)$ while the last $n - i$ rows are of the form $\mathcal{O}(|a| + |b|)$. The inverse of $I + A$ is given by $I - A + A^2 - A^3 + \dots$ but since the first $i - 1$ rows of A^k vanish,

the change of basis between the first $i-1$ components is the identity. This implies that for $k < i$

$$\gamma_k = \mathcal{O}\left(|-\delta_C^\sharp + a| + |b|^2\right).$$

Upon closer examination of the signs of $-\delta_C^\sharp + a$ and b , one can see that $|u_\ell - u'_\ell| = \mathcal{O}\left(|-\delta_C^\sharp + a| + |b|^2\right)$, $|u_r - u'_r| = \mathcal{O}\left(|-\delta_C^\sharp + a| + |b|^2\right)$, and hence by smoothness of the base point dependence, that

$$|\delta_N - \delta'_N| = \mathcal{O}\left(|-\delta_C^\sharp + a| + |b|^2\right), \quad (3.3.14)$$

$$|\delta_C - \delta'_C| = \mathcal{O}\left(|-\delta_C^\sharp + a| + |b|^2\right). \quad (3.3.15)$$

Equating coefficients on $r_i(u_\ell)$, we see that

$$\delta_C^\sharp + a + b = \delta'_N + \delta'_C + \alpha' + \mathcal{O}\left(|-\delta_C^\sharp + a| + |b|^2\right).$$

Using the estimates (3.3.14) and (3.3.15), we deduce

$$a + b = \alpha' + \mathcal{O}\left(|-\delta_C^\sharp + a| + |b|^2\right). \quad (3.3.16)$$

Case 2. ($N_\pm^\downarrow C^\uparrow \rightarrow C_\pm^\downarrow$) Assume that the two incoming waves are separated by the states u_ℓ, u_m and u_r . The parameters for the incoming waves are $\delta_N = \delta_N(u_\ell)$ for the nonclassical shock and $\delta_C(u_\ell) + \alpha$ for C^\uparrow . The solution of the Riemann problem is assumed to be composed of waves $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Using a Taylor series expansion and the differentiability properties along the curve, we have

$$\begin{aligned} u_m &= u_\ell + \delta_N r_i(u_\ell) + \frac{1}{2} \delta_N^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_\ell) + \mathcal{O}\left(|\delta_N|^3\right), \\ u_r &= u_m + (\delta_C + \alpha) r_i(u_m) + \frac{1}{2} (\delta_C + \alpha)^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_m) + \mathcal{O}\left(|\delta_C + \alpha|^3\right). \end{aligned}$$

Given that both δ_N and $\delta_C + \alpha$ are negative, we have that $\mathcal{O}\left(|\delta_N| + |\delta_C + \alpha|^3\right) = \mathcal{O}\left(|\delta_N + \delta_C + \alpha|^3\right)$. Substituting the first equation for u_m into the second equation and simplifying, results in

$$u_r = u_\ell + (\delta_N + \delta_C + \alpha) r_i(u_\ell) + \frac{1}{2} (\delta_N + \delta_C + \alpha)^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_\ell) + \mathcal{O}\left(|\delta_N + \delta_C + \alpha|^3\right). \quad (3.3.17)$$

The outgoing waves in the solution of the Riemann problem are written as

$$u_r = u_\ell + \sum_k \gamma_k r_k(u_\ell) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \gamma_i \gamma_j r_i \cdot \nabla r_j(u_\ell) + \mathcal{O}\left(|\gamma|^3\right). \quad (3.3.18)$$

Equating coefficients of first order in the expansions for incoming and outgoing waves, gives

$$\gamma_k = \mathcal{O}\left(|\delta_N + \delta_C + \alpha|^2\right), \text{ for } k \neq i, \text{ and} \quad (3.3.19)$$

$$\gamma_i = (\delta_N + \delta_C + \alpha) + \mathcal{O}(|\delta_N + \delta_C + \alpha|^2). \quad (3.3.20)$$

We can deduce from (3.3.19) that the left-hand state of the shock $C_{\pm}^{\downarrow'}$ satisfies

$$|u_\ell - u'_\ell| = \mathcal{O}(|\delta_N + \delta_C + \alpha|^2), \quad (3.3.21)$$

which also implies that

$$|\delta_N - \delta'_N| = \mathcal{O}(|\delta_N + \delta_C + \alpha|^2). \quad (3.3.22)$$

Case 4. $(\alpha_i N_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} \alpha'_i)$ Consider at time t an interaction involving a weak wave α_i approaching N_{\pm}^{\downarrow} from the left with outgoing waves $N_{\pm}^{\downarrow'}$ and α'_i . Say $\alpha = (0, \dots, 0, \alpha_i, 0, \dots, 0)$ solves the Riemann problem $(u_l \| u_m)$ and $\delta_N = (0, \dots, 0, \delta_{N,i}, 0, \dots, 0)$ solves $(u_m \| u_r)$. The wave vector $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_N)$ solves the outgoing Riemann problem $(u'_l \| u'_r)$. By Taylor's theorem we write

$$u_m = u_l + \alpha_i r_i(u_l) + \frac{1}{2} \alpha_i^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_l) + \mathcal{O}(|\alpha|^3), \quad (3.3.23)$$

and for

$$u_r = u_m + \delta_N r_i(u_m) + \frac{1}{2} \delta_N^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_m) + \mathcal{O}(|\delta_N|^3). \quad (3.3.24)$$

Substituting in for u_m and simplifying gives

$$u_r = u_l + (\delta_N + \alpha) r_i(u_l) + \quad (3.3.25)$$

$$+ \frac{1}{2} (\delta_N + \alpha)^2 r_i \cdot \nabla r_i(u_l) + \mathcal{O}([|\delta_N| + |\alpha|]^3). \quad (3.3.26)$$

We may also express this difference in terms of outgoing waves u'_l , u'_m , and u'_r which gives exactly an expansion on $\varepsilon = \delta'_N + \alpha'$.

$$u_r = u_l + \sum_k \varepsilon_k r_k(u_l) + \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon_k^2 r_k \cdot \nabla r_k(u_l) + \mathcal{O}(|\varepsilon|^3). \quad (3.3.27)$$

Equating coefficients of the first order for (3.3.27) and (3.3.25), for $k \neq i$ gives

$$\varepsilon_k = \mathcal{O}([|\delta_N| + |\alpha|]^2). \quad (3.3.28)$$

So, we can write

$$|u_l - u'_l| = \mathcal{O}([|\delta_N| + |\alpha|]^2), \quad (3.3.29)$$

$$|u'_l - u'_l| = \mathcal{O}([|\delta_N| + |\alpha|]^2), \quad (3.3.30)$$

which yields

$$|\delta_N - \delta'_N| = \mathcal{O}([|\delta_N| + |\alpha|]^2). \quad (3.3.31)$$

Comparing now the terms on $r_i(u_l)$, we see that

$$\varepsilon_i = \delta_N + \alpha + \mathcal{O}\left([\alpha] + |\delta_N|\right)^2.$$

Which for the outgoing i-waves gives

$$\varepsilon_i = \delta'_N + \alpha' = \delta_N + \alpha + \mathcal{O}\left([\alpha] + |\delta_N|\right)^2. \quad (3.3.32)$$

Using (3.3.31) we write

$$\alpha' = \alpha + \mathcal{O}\left([\alpha] + |\delta_N|\right)^2. \quad (3.3.33)$$

□

Lemme 3.3.2 (Case 1. $\alpha_i C_\pm^\downarrow \rightarrow N' C^{\uparrow'}$ or $C_\pm^\downarrow \alpha_i \rightarrow N' C^{\uparrow'}$). *Suppose a weak wave α_i interacts with C_\pm^\downarrow to generate a nonclassical and classical shock pair $N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$. Three types of interactions may occur. When the wave α_i is slower than C_\pm^\downarrow , then the interaction must be CR-4 and α_i must be a rarefaction. If the wave α_i is faster than C_\pm^\downarrow , then the interaction can be either RC-3, with a rarefaction α_i , or CC-3 with a shock α_i . When α_i is slower than C_\pm^\downarrow , then*

$$\begin{aligned} [V_L] &= +k_L^< \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_M] &= 0, \\ [V_R] &= -k_R |\alpha_i| + k_R^> \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|), \\ [W] &= |\alpha_i| \left(-k_R + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

When α_i is faster than C_\pm^\downarrow , then

$$\begin{aligned} [V_L] &= -k_L |\alpha_i| + k_L^< \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_M] &= 0, \\ [V_R] &= +k_R^> \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|), \\ [W] &= |\alpha_i| \left(-k_L + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

DÉMONSTRATION. Consider the case where the weak wave α_i approaches C_\pm^\downarrow from the right and generates a CR-4 interaction, Figure 3.7. The interaction may generate weak waves in the j -th family, $j \neq i$, of strength $\mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|)$, but otherwise it is easy to see that

$$\begin{aligned} [V_L] &= k_L^< \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_M] &= 0, \\ [V_R] &= -k_R |\alpha_i| + k_R^> \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|). \end{aligned}$$

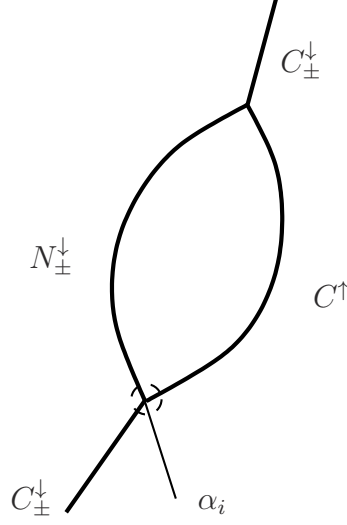


FIGURE 3.7. Case 1. $\alpha_i C_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N' C^{\uparrow'}$ or $C_{\pm}^{\downarrow} \alpha_i \rightarrow N' C^{\uparrow'}$.

We now study simultaneously the RC-3 and CC-3 interactions with a weak wave α_i approaching C_{\pm}^{\downarrow} from the left.

$$[V_L] = -k_L |\alpha_i| + k_L^< \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|),$$

$$[V_M] = 0,$$

$$[V_R] = k_R^> \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|).$$

□

Lemme 3.3.3 (Case 2. $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow} \rightarrow C_{\pm}^{\downarrow}$). *During the strong interaction $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow} \rightarrow C_{\pm}^{\downarrow}$, we have*

$$[V_L] = k_L^< \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}| |C^{\uparrow}| \mathcal{O}(|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow})|),$$

$$[V_M] = 0,$$

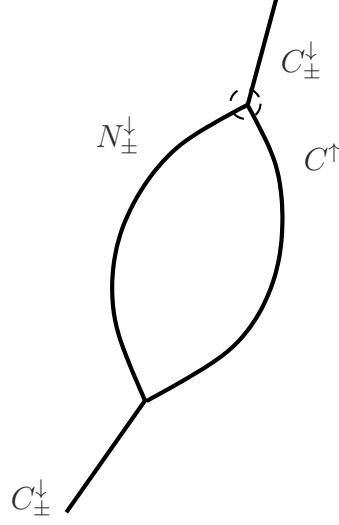
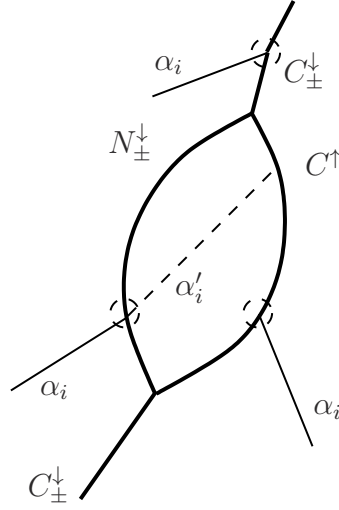
$$[V_R] = k_R^> \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}| |C^{\uparrow}| \mathcal{O}(|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow})|),$$

$$[W] = (k_L^< + k_R^>) \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}| |C^{\uparrow}| \mathcal{O}(|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow})|). \quad (3.3.36)$$

DÉMONSTRATION. Consider the strong $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow} \rightarrow C_{\pm}^{\downarrow}$ interaction, see Figure 3.8. The strength of the weak outgoing waves is obviously proportional to $|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |C^{\uparrow}|$ but also to

$$|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow})|.$$

These weak waves only contribute to V_L and V_R with $V_M = 0$ before and after the $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow}$ interaction. □

FIGURE 3.8. Case 2. $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow} \rightarrow C_{\pm}^{\downarrow}$.FIGURE 3.9. Case 3. $\alpha_i C \rightarrow C'$ or $C \alpha_i \rightarrow C'$, case 4. $\alpha_i N_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} \alpha_i'$.

Lemme 3.3.4 (Case 3. $\alpha_i C \rightarrow C'$ or $C \alpha_i \rightarrow C'$). Consider a weak wave α_i of the i -th family. The strong shock C can be either a decreasing shock C_{\pm}^{\downarrow} or the increasing shock C^{\uparrow} that appears when a nonclassical shock is present, Figure 3.9. If the weak wave crosses the classical strong shock C_{\pm}^{\downarrow} from the left, then

$$\begin{aligned}
 [V_L] &= -k_L |\alpha_i| + k_L^< \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|), \\
 [V_M] &= 0, \\
 [V_R] &= +k_R^> \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|), \\
 [W] &= |\alpha_i| \left(-k_L + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) \right). \tag{3.3.37}
 \end{aligned}$$

If the weak wave crosses the shock C_{\pm}^{\downarrow} from the right, then

$$\begin{aligned} [V_L] &= +k_L^< \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_M] &= 0, \\ [V_R] &= -k_R |\alpha_i| + k_R^> \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [W] &= |\alpha_i| \left(-k_R + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

If the weak wave crosses the classical strong shock C^{\uparrow} from the left, then

$$\begin{aligned} [V_L] &= 0, \\ [V_M] &= -k_M |\alpha_i| + k_M^< \mathcal{O}(|C^{\uparrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_R] &= +k_R^> \mathcal{O}(|C^{\uparrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [W] &= |\alpha_i| \left(-k_M + (k_M^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

If the weak wave crosses the shock C^{\uparrow} from the right, then

$$\begin{aligned} [V_L] &= 0, \\ [V_M] &= +k_M^< \mathcal{O}(|C^{\uparrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_R] &= -k_R |\alpha_i| + k_R^> \mathcal{O}(|C^{\uparrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [W] &= |\alpha_i| \left(-k_R + (k_M^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

DÉMONSTRATION. The proof is relatively straightforward and we treat only the first two cases. When the wave α_i approaches from the left, then

$$\begin{aligned} [V_L] &= -k_L |\alpha_i| + k_L^< \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_M] &= 0, \\ [V_R] &= k_R^> \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.5 (Case 4. $\alpha_i N_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} \alpha'_i$). Suppose a weak wave α_i of the i -th family approaches N_{\pm}^{\downarrow} from the left and that the nonclassical shock $N_{\pm}^{\downarrow'}$ remains after the interaction as in Figure 3.9. Then the only two possible interactions are RN and CN-3, and in both cases, we have

$$\begin{aligned} [V_L] &= -k_L |\alpha_i| + k_L^< \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_M] &= +k_M |\alpha'_i| + (k_M + k_M^>) \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|), \\ [V_R] &= 0, \end{aligned}$$

With the constant $C_i < 1$ provided by property (H4) of Φ_i^b , we have

$$[W] \leq |\alpha_i| \left(-k_L + C_i k_M + (k_M + k_L^< + k_M^>) \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|) \right). \quad (3.3.41)$$

DÉMONSTRATION. We will consider the changes in the total variation with respect to the Definition 3.3.2 of wave strength. When the interaction occurs it generates secondary waves in the families $j \neq i$ of strength $\mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|)$, and there is an outgoing wave α'_i to the right of $N_\pm^{\downarrow'}$ and of the same type as α_i . This implies that

$$|u_\ell - u'_\ell| = \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|), \quad |u_r - u'_r| = \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|), \quad |\Phi_i^b(u_\ell) - u'_m| = \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|).$$

Recall that only RN and CN-3 interactions are admissible and so α_i could be a rarefaction or a shock. We always have $[V_R] = 0$ but the calculation of the two other variations is less obvious.

$$\begin{aligned} [V_L] &= -k_L |\alpha_i| + k_L^< \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|) \\ [V_M] &= +k_M |\alpha'_i| + k_M^> \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|) \\ &= +k_M \left| \mu_i(\Phi_{i0}^b(u'_r)) - \mu_i(\Phi_{i0}^b(u'_m)) \right| + k_M^> \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|) \\ &= +k_M \left| \mu_i(\Phi_{i0}^b \circ \Phi_i^b(u_m)) - \mu_i(\Phi_{i0}^b \circ \Phi_i^b(u_\ell)) \right| + (k_M + k_M^>) \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|) \\ &= +k_M C_i \left| \mu_i(u_m) - \mu_i(u_\ell) \right| + (k_M + k_M^>) \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|) \end{aligned}$$

where we have used C_i of condition (H4). \square

Lemme 3.3.6 (Case 5. $\beta_j C_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$ or $C_\pm^\downarrow \beta_j \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$). *Consider a weak wave β_j , with $j \neq i$, which after interacting with C_\pm^\downarrow leads to $N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$, Figure 3.10. When the weak wave is faster than C_\pm^\downarrow , that is $j > i$, then*

$$\begin{aligned} [V_L] &= -k_L^> |\beta_j| + k_L^< \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\beta_j|), \\ [V_M] &= 0, \\ [V_R] &= +k_R^> |\beta_j| + k_R^> \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\beta_j|), \\ [W] &= |\beta_j| \left(-k_L^> + k_R^> + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

On the other hand, when $j < i$ we have

$$\begin{aligned} [V_L] &= +k_L^< |\beta_j| + k_L^< \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\beta_j|), \\ [V_M] &= 0, \\ [V_R] &= -k_R^< |\beta_j| + k_R^> \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\beta_j|), \\ [W] &= |\beta_j| \left(-k_R^< + k_L^< + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

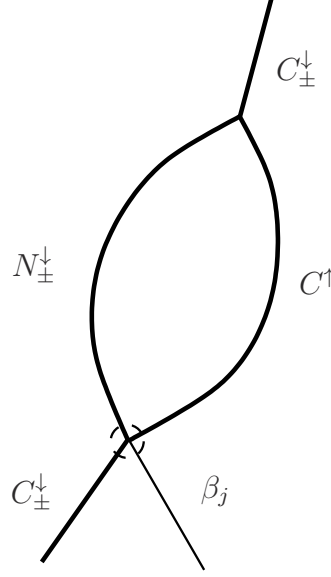


FIGURE 3.10. Case 5. $\beta_j C_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$ or $C_{\pm}^{\downarrow} \beta_j \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$.

DÉMONSTRATION. We begin with the case where β_j is faster than C_{\pm}^{\downarrow} . The weak wave β_j belongs to the family j , hence up to a quadratic error, the strength of the outgoing wave j -wave is the same strength as that of the incoming wave β_j . We begin by computing the change when the wave β_j belongs to a family $j > i$.

$$[V_L] = -k_L^> |\beta_j| + k_L^< \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|)$$

$$[V_M] = 0$$

$$[V_R] = +k_R^> |\beta_j| + k_R^> \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|)$$

In the second case, that is when $j < i$, then the wave β_j approaches from the right. We now remark that

$$[V_L] = +k_L^< |\beta_j| + k_L^< \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|),$$

$$[V_M] = 0,$$

$$[V_R] = -k_R^< |\beta_j| + k_R^> \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|).$$

□

Lemme 3.3.7 (Case 6. $\beta_j N_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} \beta_j'$ or $N_{\pm}^{\downarrow} \beta_j \rightarrow \beta_j' N_{\pm}^{\downarrow'}$). Suppose a weak wave β_j from the j -th family, $j > i$, crosses N_{\pm}^{\downarrow} from the left and generates a small wave β_j' in the j -th family, Figure 3.11, then

$$[V_L] = -k_L^> |\beta_j| + k_L^< \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|),$$

$$[V_M] = +k_M^> |\beta_j| + (k_M + k_M^>) \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|),$$

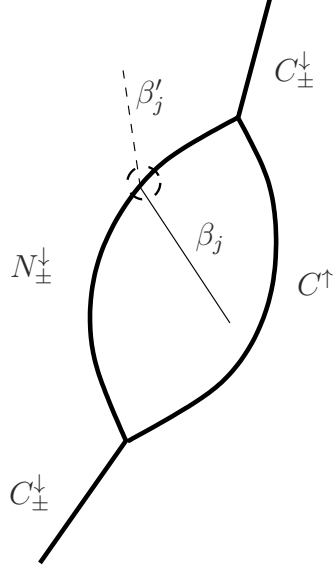


FIGURE 3.11. Case 6. $\beta_j N_{\pm}^{\downarrow} \rightarrow N_{\pm}^{\downarrow'} \beta'_j$ or $N_{\pm}^{\downarrow} \beta_j \rightarrow \beta'_j N_{\pm}^{\downarrow'}$.

$$\begin{aligned} [V_R] &= 0, \\ [W] &= |\beta_j| \left(-k_L^> + k_M^> + (k_M + k_L^< + k_M^>) \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

Suppose a weak wave β_j from the j -th family, $j < i$, crosses N_{\pm}^{\downarrow} from the right. Then

$$\begin{aligned} [V_L] &= +k_L^< |\beta_j| + k_L^< \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|), \\ [V_M] &= -k_M^< |\beta_j| + (k_M + k_M^>) \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|), \\ [V_R] &= 0, \\ [W] &= |\beta_j| \left(-k_M^< + k_L^< + (k_M + k_L^< + k_M^>) \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Lemme 3.3.8 (Case 7. $\beta_j C \rightarrow C' \beta'_j$ or $C \beta_j \rightarrow \beta'_j C'$). Consider a weak wave β_j belonging to the family $j > i$. The strong shock C can be either decreasing C_{\pm}^{\downarrow} or increasing C^{\uparrow} . Suppose that β_j crosses C_{\pm}^{\downarrow} from the left, Figure 3.12. Then we have the estimates

$$\begin{aligned} [V_L] &= -k_L^> |\beta_j| + k_L^< \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|), \\ [V_M] &= 0, \\ [V_R] &= +k_R^> |\beta_j| + k_R^> \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|), \\ [W] &= |\beta_j| \left(-k_L^> + k_R^> + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) \right). \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

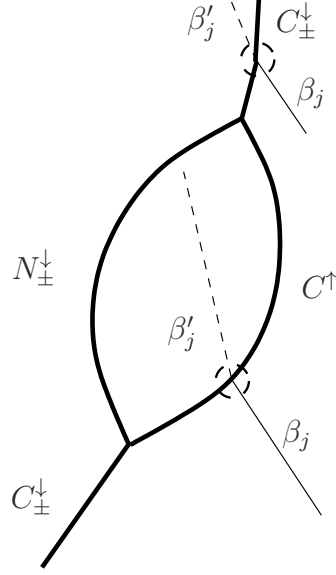


FIGURE 3.12. Case 7. $\beta_j C \rightarrow C' \beta_j'$ or $C \beta_j \rightarrow \beta_j' C'$.

Suppose a weak wave β_j from the j -th family, $j < i$, crosses C_{\pm}^{\downarrow} from the right. Then

$$\begin{aligned}
 [V_L] &= +k_L^< |\beta_j| + k_L^< \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|), \\
 [V_M] &= 0, \\
 [V_R] &= -k_R^< |\beta_j| + k_R^> \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j|), \\
 [W] &= |\beta_j| \left(-k_R^< + k_L^< + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) \right). \tag{3.3.47}
 \end{aligned}$$

Suppose that β_j , with $j > i$, crosses C^{\uparrow} from the left, then we have the estimates

$$\begin{aligned}
 [V_L] &= 0, \\
 [V_M] &= -k_M^> |\beta_j| + k_M^< \mathcal{O}(|C^{\uparrow}| \cdot |\beta_j|), \\
 [V_R] &= +k_R^> |\beta_j| + k_R^> \mathcal{O}(|C^{\uparrow}| \cdot |\beta_j|), \\
 [W] &= |\beta_j| \left(-k_M^> + k_R^> + (k_M^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|) \right). \tag{3.3.48}
 \end{aligned}$$

Consider a weak wave β_j belonging to the family $j < i$ and crossing C^{\uparrow} from the right. Then the interactions are such that

$$\begin{aligned}
 [V_L] &= 0, \\
 [V_M] &= +k_M^< |\beta_j| + k_M^< \mathcal{O}(|C^{\uparrow}| \cdot |\beta_j|), \\
 [V_R] &= -k_R^< |\beta_j| + k_R^> \mathcal{O}(|C^{\uparrow}| \cdot |\beta_j|), \\
 [W] &= |\beta_j| \left(-k_R^< + k_M^< + (k_M^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|) \right). \tag{3.3.49}
 \end{aligned}$$

3.3.4. Interaction potential

We propose to study the following quadratic interaction potential. It will involve the usual product of the strength of the waves weighed by the the positive part of the difference in wave speeds. This approach was studied by Liu [55] and applied by Iguchi and LeFloch [38] to conservation laws with kinetics. As is usually the case, the interaction potential is defined only for front-tracking approximations, with waves localized at point x , in which case, we may speak of its strength σ_x and of its family i_x . approximations

$$Q(u(t)) := \sum_{\substack{\text{waves at } x < y \\ \text{approaching} \\ \text{family } i_x \neq i_y \neq i}} \sigma_x \cdot \sigma_y + \sum_{\substack{\text{weak approaching waves } x < y \\ i_x = i \text{ and/or} \\ i_y = i}} |v_x - v_y|^+ \sigma_x \cdot \sigma_y. \quad (3.3.50)$$

The second item includes potential interactions between weak and strong i-waves.

This section will require a measure of the strength of the pertubation as a function of time, but this is not immediately an obvious quantity to define since the wave of the strong waves travel in time. Choose a time t , and given the position of the waves $x^h(t), y^h(t)$ define the unpertubed waves as

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} u_* & \text{if } x < x^h(t), \\ \Phi_{i_0}^b(u_*) & \text{if } x^h(t) \leq x < y^h(t), \\ u_*^N & \text{if } y^h(t) \leq x. \end{cases}$$

We define the strength of the perturbation at time t to be

$$\epsilon(t) := \text{TV} \left(u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t) \right). \quad (3.3.51)$$

It should be clear that

$$\epsilon(t) = \sum_{\substack{\text{weak waves } \beta \\ \text{in } u(\cdot, t)}} |\beta|$$

also holds. We remark that we have yet to show that this quantity does not increase without bound.

First, we will study here interactions involving waves from the i -th family. We distinguish between several cases of interactions. For the functional Q , we extend the decomposition (3.3.50) to also treat the change in Q . In fact, in certain cases $[Q]$ will not be negative but $[W]$ will contribute negative first order terms to control $[Q]$, and so it is important to accurately measure the change in Q . We will introduce a decomposition of the terms appearing in the variation of Q during

interactions. The analysis will study each term separately before accounting for the total change.

If an interaction occurs among weak waves of families different than i , the concave-convex family, then the change in Q is quadratic in the strength of the waves interacting and the usual argument of Glimm applies and shows that for some small total variation ϵ and a large constant K , then $W + KQ$ is decreasing.

If an interaction occurs which involves at least one wave from the i -th family, then the change in Q involves (1) quadratic terms in the strength of the interacting waves weighted by their difference in wave speeds and (2), the sum of the changes in terms $|v_x - v_y|^+ \sigma_x \sigma_y$ where one of them was involved in the interaction but the other wave was not. More concretely, consider two incoming waves C_ℓ, C_r , respectively the left and right incoming waves, which generate C'_ℓ, C'_r , respectively the left and right outgoing waves. Then, abusing our notation, we write

$$[Q(u(\cdot, t))] = [Q_1] + [Q_2],$$

where

$$[Q_1] = |v(C'_\ell) - v(C'_r)|^+ |C'_\ell| |C'_r| - |v(C_\ell) - v(C_r)|^+ |C_\ell| |C_r|,$$

and

$$\begin{aligned} [Q_2] = & \sum_{\substack{\text{weak } \beta_j \text{ at } y \\ j \geq i \text{ and } y < x}} \left\{ |v(\beta_j) - v(C'_\ell)|^+ |C'_\ell| |\beta_j| + |v(\beta_j) - v(C'_r)|^+ |C'_r| |\beta_j| \right. \\ & \left. - |v(\beta_j) - v(C_\ell)|^+ |C_\ell| |\beta_j| - |v(\beta_j) - v(C_r)|^+ |C_r| |\beta_j| \right\} \\ & + \sum_{\substack{\text{weak } \beta_j \text{ at } y \\ j \leq i \text{ and } x < y}} \left\{ |v(C'_\ell) - v(\beta_j)|^+ |C'_\ell| |\beta_j| + |v(C'_r) - v(\beta_j)|^+ |C'_r| |\beta_j| \right. \\ & \left. - |v(C_\ell) - v(\beta_j)|^+ |C_\ell| |\beta_j| - |v(C_r) - v(\beta_j)|^+ |C_r| |\beta_j| \right\}. \end{aligned}$$

The analysis of $[Q]$ will demonstrate that $[Q_1]$ is always negative and that if the perturbation of the solution u at time t away from the unperturbed state \bar{v}_0 satisfies an a priori bound with respect to the strength of the strong waves, then the potential increase in $[Q_2]$ can be compensated by $[Q_1]$ and result in the sum $[Q]$ being negative by a known negative quantity.

Among the two variations above, there are generalities that can be said about $[Q_2]$. In most cases, the variation in Q_2 will be caused by the interaction of two incoming waves and two outgoing waves, and for the sake of argument, we will

consider only weak waves β to the left of the interaction. Then for every such weak wave β , there is a contribution to $[Q_2]$ of the form

$$[Q_2]_\beta := |\beta| \left(\left| v(\beta) - v(C'_\ell) \right|^+ |C'_\ell| + \left| v(\beta) - v(C'_r) \right|^+ |C'_r| \right. \\ \left. - \left| v(\beta) - v(C_\ell) \right|^+ |C_\ell| - \left| v(\beta) - v(C_r) \right|^+ |C_r| \right).$$

As a function of $v(\beta)$, this expression is continuous and piecewise linear with four points of discontinuities in the derivative. Clearly, if $v(\beta) < m_v := \min v(C)$ then all the weights vanish and $[Q_2]_\beta = 0$. We claim that over the unbounded domain $[M_v, \infty[$, with $M_v = \max v(C)$, the variation $[Q_2]_\beta$ is decreasing and therefore the maximum value is taken at $v(\beta) = M_v$. This follows from the fact that during interactions between waves of the family i ,

$$|C_\ell| + |C_r| - |C'_\ell| - |C'_r| \leq 0,$$

with equality only when all waves are shocks. Each weight can be written as

$$\left| v(\beta) - v(C) \right|^+ = |v(\beta) - M_v| + |M_v - v(C)|$$

and therefore we have

$$[Q_2]_\beta = |\beta| |v(\beta) - M_v| \left(|C'_\ell| + |C'_r| - |C_\ell| - |C_r| \right) \\ + |\beta| \left(\Delta v_1 |C'_\ell| + \Delta v_2 |C'_r| - \Delta v_3 |C_\ell| - \Delta v_4 |C_r| \right).$$

Each of the new weights Δv_i is constant with respect to $v(\beta)$ but the first term is negative. Hence the maximum of $[Q_2]_\beta$ must occur at one of the three largest speeds where the derivative is discontinuous. Below, when studying $[Q_2]_\beta$ it will be easy to infer the speed $v(\beta)$ for which the value will be largest.

Lemme 3.3.9 (Case 1. $\alpha_i C_\pm^\downarrow \rightarrow NC^\uparrow$ or $C_\pm^\downarrow \alpha_i \rightarrow NC^\uparrow$). *Consider at time t a weak wave α_i interacting with C_\pm^\downarrow to generate a nonclassical and a classical shock pair $N_\pm^{\downarrow'} C^\uparrow$. If the perturbation $\epsilon(t)$ satisfies an a priori bound*

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|), \quad (3.3.52)$$

then

$$[Q] \leq -\left| \mathcal{O}(|\alpha_i| \cdot |C_\pm^\downarrow|^2) \right|.$$

DÉMONSTRATION. There are three types of interactions that occur, RC-3, CC-3, and CR-4. All wave speeds, except $v(\alpha_i)$, are close. In all these cases,

$$[Q_1] = -\left| v(\alpha_i) - v(C_\pm^\downarrow) \right| |\alpha_i| \cdot |C_\pm^\downarrow| = -\left| \mathcal{O}(|\alpha_i| \cdot |C_\pm^\downarrow|^2) \right|. \quad (3.3.53)$$

Consider first the case where α_i is a rarefaction and the shock strengths satisfy

$$|N_{\pm}^{\downarrow'}| + |C^{\uparrow'}| = |C^{\downarrow}| - |\alpha_i| + \mathcal{O}(|C^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|),$$

which implies

$$|N_{\pm}^{\downarrow'}| + |C^{\downarrow'}| < |C^{\downarrow}| + \mathcal{O}(|C^{\downarrow}| \cdot |\alpha_i|).$$

An inspection of the normalized wave speeds associated to the states u_l and u_r shows that

$$v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < \min [v(C_{\pm}^{\downarrow}), v(C^{\uparrow'})] < v(\alpha_i),$$

and that $v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow}) = \mathcal{O}(|\alpha_i|)$. We will now analyze the interaction term $[Q_2]$ in (3.3.50). Suppose there is a weak wave β to the left of the interaction, then

$$\begin{aligned} [Q_2]_{\beta} = & |\beta| \left(\left| v(\beta) - v(N_{\pm}^{\downarrow'}) \right|^+ |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \left| v(\beta) - v(C^{\uparrow'}) \right|^+ |C^{\uparrow'}| \right. \\ & \left. - \left| v(\beta) - v(\alpha_i) \right|^+ |\alpha_i| - \left| v(\beta) - v(C_{\pm}^{\downarrow}) \right|^+ |C_{\pm}^{\downarrow}| \right). \end{aligned}$$

If $v(\beta) < v(N_{\pm}^{\downarrow'})$, then $[Q_2]_{\beta} < 0$. The largest value of this function of $v(\beta)$ occurs when $v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < v(C^{\uparrow'}) < v(\beta) = v(C_{\pm}^{\downarrow}) < v(\alpha_i)$, but in that case

$$\begin{aligned} [Q_2]_{\beta} \leq & |\beta| \left(\left| v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'}) \right| |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \left| v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow'}) \right| |C^{\uparrow'}| - \left| v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(\alpha_i) \right| |\alpha_i| \right) \\ \leq & |\beta| \left(\mathcal{O}(|\alpha_i|) |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \mathcal{O}(|\alpha_i|) |C^{\uparrow'}| \right) \leq \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |C_{\pm}^{\downarrow}|). \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

Still in the case RC-3, suppose now there is a weak wave β to the right of the interaction, then

$$\begin{aligned} [Q_2]_{\beta} = & |\beta| \left(\left| v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - v(\beta) \right|^+ |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \left| v(C^{\uparrow'}) - v(\beta) \right|^+ |C^{\uparrow'}| \right. \\ & \left. - \left| v(\alpha_i) - v(\beta) \right|^+ |\alpha_i| - \left| v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(\beta) \right|^+ |C_{\pm}^{\downarrow}| \right). \end{aligned}$$

The variation is largest when $v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < v(C_{\pm}^{\downarrow}) = v(\beta) < v(C^{\uparrow'}) < v(\alpha_i)$, in which case

$$\begin{aligned} [Q_2]_{\beta} \leq & |\beta| \left(\left| v(C^{\uparrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow}) \right| |C^{\uparrow'}| - \left| v(\alpha_i) - v(C_{\pm}^{\downarrow}) \right| |\alpha_i| \right) \\ \leq & |\beta| \left(\mathcal{O}(|\alpha_i|) |C_{\pm}^{\downarrow}| + \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) |\alpha_i| \right) = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |C_{\pm}^{\downarrow}|). \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

Combining (3.3.53) with either (3.3.54) or (3.3.55), we find

$$[Q] = [Q_1] + \sum_{\beta} [Q_2]_{\beta} \leq - \left| \mathcal{O}(|\alpha_i| \cdot |C_{\pm}^{\downarrow}|^2) \right| + \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |C_{\pm}^{\downarrow}|),$$

which is negative if a bound of the form $\epsilon(t) < \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|)$ is satisfied by the perturbation.

In the case CC-3, the weak wave α_i can come either from the left or the right of C_\pm^\downarrow . For the sake of brevity, we will consider only left incoming weak waves α_i . The speeds satisfy

$$v(C_\pm^\downarrow) < v(N_\pm^{\downarrow'}) < v(C^{\uparrow'}) < v(\alpha_i), \quad (3.3.56)$$

and for the strengths we have

$$|N_\pm^{\downarrow'}| + |C_\pm^{\uparrow'}| = |C_\pm^\downarrow| - \text{sign}(\alpha_i)|\alpha_i| + \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow| \cdot |\alpha_i|).$$

Suppose that there is a weak wave β to the left of the interaction, then

$$\begin{aligned} [Q_2]_\beta = & |\beta| \left(\left| v(\beta) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(\beta) - v(C^{\uparrow'}) \right|^+ |C^{\uparrow'}| \right. \\ & \left. - \left| v(\beta) - v(\alpha_i) \right|^+ |\alpha_i| - \left| v(\beta) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| \right). \end{aligned}$$

The worst case occurs when $v(\beta) = v(\alpha_i)$ and the change is

$$[Q_2]_\beta \leq |\beta| \left(\left| v(\alpha_i) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(\alpha_i) - v(C^{\uparrow'}) \right|^+ |C^{\uparrow'}| - \left| v(\alpha_i) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| \right). \quad (3.3.57)$$

Suppose now that there is a weak wave β to the right of the interaction, then the largest value is found when $v(\beta) = v(C_\pm^\downarrow)$.

$$\begin{aligned} [Q_2]_\beta = & |\beta| \left(\left| v(N_\pm^{\downarrow'}) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(C^{\uparrow'}) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |C^{\uparrow'}| - \left| v(\alpha_i) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |\alpha_i| \right) \\ \leq & |\beta| \left(\mathcal{O}(|\alpha_i|)|N_\pm^{\downarrow'}| + \mathcal{O}(|\alpha_i|)|C^{\uparrow'}| - \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|)|\alpha_i| \right) = \mathcal{O}(|\beta||\alpha_i||C_\pm^\downarrow|). \end{aligned}$$

As in the case RC-3, imposing an a priori constraint $\sum_\beta |\beta| \leq \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|)$ implies that $[Q]$ is negative.

In the case CR-4, the speeds are ordered as

$$v(\alpha_i) < v(N_\pm^{\downarrow'}) < \min \left[v(C_\pm^\downarrow), v(C^{\uparrow'}) \right]. \quad (3.3.58)$$

Suppose there is a weak wave β to the left of the interaction, then

$$\begin{aligned} [Q_2]_\beta = & |\beta| \left(\left| v(\beta) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(\beta) - v(C^{\uparrow'}) \right|^+ |C^{\uparrow'}| \right. \\ & \left. - \left| v(\beta) - v(\alpha_i) \right|^+ |\alpha_i| - \left| v(\beta) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| \right). \end{aligned}$$

The worst case corresponds to $v(\beta) = v(C_\pm^\downarrow) > v(C^{\uparrow'})$. Then, we estimate

$$\begin{aligned} [Q_2]_\beta = & |\beta| \left(\left| v(C_\pm^\downarrow) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(C_\pm^\downarrow) - v(C^{\uparrow'}) \right|^+ |C^{\uparrow'}| - \left| v(C_\pm^\downarrow) - v(\alpha_i) \right|^+ |\alpha_i| \right) \\ \leq & |\beta| \left(\mathcal{O}(|\alpha_i|)|N_\pm^{\downarrow'}| + \mathcal{O}(|\alpha_i|)|C^{\uparrow'}| - \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|)|\alpha_i| \right) = \mathcal{O}(|\beta||\alpha_i||C_\pm^\downarrow|). \end{aligned}$$

Taking into account (3.3.4) and an a priori bound $|\beta| \leq \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|)$, we deduce

$$[Q_2]_{\beta} \leq |\beta| \left(\mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) |\alpha_i| \right) \leq \mathcal{O}(|\alpha_i| |C_{\pm}^{\downarrow}|^2). \quad (3.3.59)$$

Suppose now there is a weak wave β to the right of the interaction, then

$$\begin{aligned} [Q_2]_{\beta} = & |\beta| \left(\left| v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - v(\beta) \right|^+ |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \left| v(C^{\uparrow'}) - v(\beta) \right|^+ |C^{\uparrow'}| \right. \\ & \left. - \left| v(\alpha_i) - v(\beta) \right|^+ |\alpha_i| - \left| v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(\beta) \right|^+ |C_{\pm}^{\downarrow}| \right). \end{aligned}$$

The two extreme cases correspond to $v(\beta) = v(C_{\pm}^{\downarrow})$ and $v(\beta) = v(\alpha_i)$, but we consider here only $v(\alpha_i) < v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < v(\beta) = v(C_{\pm}^{\downarrow}) < v(C^{\uparrow'})$. If this happens,

$$\begin{aligned} [Q_2]_{\beta} = & |\beta| \left(\left| v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow}) \right| |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \left| v(C^{\uparrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow}) \right| |C^{\uparrow'}| \right. \\ & \left. - \left| v(\alpha_i) - v(C_{\pm}^{\downarrow}) \right| |\alpha_i| \right) \\ \leq & |\beta| \left(\mathcal{O}(|\alpha_i|) |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \mathcal{O}(|\alpha_i|) |C^{\uparrow'}| - \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) |\alpha_i| \right) \\ = & \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |C_{\pm}^{\downarrow}|). \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

Again, combining (3.3.53) with an a priori bound $\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|)$, we deduce that $[Q] \leq 0$. \square

Lemme 3.3.10 (Case 2. $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow} \rightarrow C_{\pm}^{\downarrow'}$). *If during the strong interaction $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow} \rightarrow C_{\pm}^{\downarrow'}$ at time t , a bound of the form*

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|), \quad (3.3.61)$$

is satisfied by the perturbation, then

$$[Q] \leq - \left| \mathcal{O} \left(\left| v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow}) \right| |N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |C^{\uparrow}| \right) \right|.$$

DÉMONSTRATION. Consider the strong $N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow} \rightarrow C_{\pm}^{\downarrow'}$ interaction. We have

$$\begin{aligned} |C_{\pm}^{\downarrow'}| &= |N_{\pm}^{\downarrow}| + |C^{\uparrow}| + \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| |C^{\uparrow}|), \\ v(C^{\uparrow}) &< v(N_{\pm}^{\downarrow}) < v(C_{\pm}^{\downarrow'}). \end{aligned}$$

All wave speeds are close and in fact, for example $|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow})| = \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| - |C^{\uparrow}| - |C_{\pm}^{\downarrow'}|)$, is of the size of the perturbation $\epsilon(t)$. Clearly,

$$[Q_1] = - \left| v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow}) \right| |N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |C^{\uparrow}|. \quad (3.3.62)$$

Consider a weak wave β located to the left of the interaction. Then for all speeds $v(\beta)$,

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(\beta) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| - \left| v(\beta) - v(N_\pm^\downarrow) \right|^+ |N_\pm^\downarrow| - \left| v(\beta) - v(C^\uparrow) \right|^+ |C^\uparrow| \right) \leq 0.$$

Consider a weak wave β located to the right of the interaction. The variation is

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(C_\pm^\downarrow) - v(\beta) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| - \left| v(N_\pm^\downarrow) - v(\beta) \right|^+ |N_\pm^\downarrow| - \left| v(C^\uparrow) - v(\beta) \right|^+ |C^\uparrow| \right),$$

The worst case is $v(\beta) = v(N_\pm^\downarrow)$, then we have the obvious overestimate

$$[Q_2]_\beta \leq |\beta| \left| v(C_\pm^\downarrow) - v(N_\pm^\downarrow) \right| |C_\pm^\downarrow| = \mathcal{O}(|\beta| |v(C_\pm^\downarrow) - v(N_\pm^\downarrow)| |N_\pm^\downarrow|).$$

And so, if $\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|C^\uparrow|)$ then the result is demonstrated. \square

Lemme 3.3.11 (Case 3. $\alpha_i C_\pm^\downarrow \rightarrow C_\pm^{\downarrow'}$ or $C_\pm^\downarrow \alpha_i \rightarrow C_\pm^{\downarrow'}$). *The interaction of a weak wave α_i of the i -th family with a strong wave of the same family C_\pm^\downarrow splits into four distinct cases, depending on whether α_i is a shock or a rarefaction, and whether the wave approaches from the left or the right. In all of these cases, if a bound of the form*

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|C^\downarrow|) \quad (3.3.63)$$

is satisfied then

$$[Q] \leq -\left| \mathcal{O}(|\alpha_i| \cdot |C_\pm^\downarrow|^2) \right|.$$

DÉMONSTRATION. We remark that the ordering of the velocities are all distinct and include all cases with $v(\alpha_i)$ being either the slowest or fastest. In all of these cases only one wave is outgoing, so

$$[Q_1] = - \left| v(\alpha_i) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |\alpha_i| \cdot |C_\pm^\downarrow| = -\mathcal{O}(|\alpha_i| \cdot |C_\pm^\downarrow|^2). \quad (3.3.64)$$

Consider the first interaction $\alpha_i C^\downarrow \rightarrow C^{\downarrow'}$ with α_i a shock. We have the identities

$$\begin{aligned} |C^{\downarrow'}| &= |\alpha_i| + |C^\downarrow| + \mathcal{O}(|\alpha_i| |C^\downarrow|), \\ v(C^\downarrow) &< v(C^{\downarrow'}) < v(\alpha_i). \end{aligned}$$

Suppose a weak wave β is located to the left of the interaction, then the largest value of

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(\beta) - v(C^{\downarrow'}) \right|^+ |C^{\downarrow'}| - \left| v(\beta) - v(C^\downarrow) \right|^+ |C^\downarrow| - \left| v(\beta) - v(\alpha_i) \right|^+ |\alpha_i| \right),$$

occurs when $v(\beta) = v(\alpha_i)$, with which we find

$$\begin{aligned} [Q_2]_\beta &\leq |\beta| \left(\left| v(\alpha_i) - v(C^{\downarrow'}) \right| |C^{\downarrow'}| - \left| v(\alpha_i) - v(C^\downarrow) \right| |C^\downarrow| \right) \\ &= |\beta| \left(\left| v(\alpha_i) - v(C^{\downarrow'}) \right| (|C^{\downarrow'}| - |C^\downarrow|) - \left| v(C^{\downarrow'}) - v(C^\downarrow) \right| |C^\downarrow| \right) = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |C^\downarrow|). \end{aligned}$$

Suppose β is to the right of the interaction.

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(C^{\downarrow'}) - v(\beta) \right|^+ |C^{\downarrow'}| - \left| v(C^\downarrow) - v(\beta) \right|^+ |C^\downarrow| - \left| v(\alpha_i) - v(\beta) \right|^+ |\alpha_i| \right)$$

The worst case is $v(\beta) = v(C^\downarrow)$, we can compute

$$[Q_2]_\beta \leq |\beta| \left(\left| v(C^{\downarrow'}) - v(C^\downarrow) \right| |C^{\downarrow'}| - \left| v(\alpha_i) - v(C^\downarrow) \right| |\alpha_i| \right) = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |C^\downarrow|).$$

Again $[Q]$ can be shown to be decreasing if an a priori bound $\sum_\beta |\beta| \leq \mathcal{O}(|C^\downarrow|)$ is satisfied.

Consider the second case $\alpha_i C^\downarrow - C^{\downarrow'}$ with α_i a rarefaction. We observed that the states of interest satisfy

$$\begin{aligned} |C^\downarrow| - |\alpha_i| &= |C^{\downarrow'}| + \mathcal{O}(|\alpha_i| |C^\downarrow|). \\ v(C^{\downarrow'}) &< v(C^\downarrow) < v(\alpha_i). \end{aligned}$$

Suppose β is a weak wave to the left of the interaction, then

$$[Q_2]_\beta \leq |\beta| \left| v(C^\downarrow) - v(C^{\downarrow'}) \right|^+ |C^{\downarrow'}| = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |C^\downarrow|).$$

This suffices to prove the result in that case.

The third interaction is $C^\downarrow_\pm \alpha_i - C^\downarrow_\pm$ where α_i is a shock. The following two identities hold

$$\begin{aligned} |C^{\downarrow'}| &= |C^\downarrow_\pm| + |\alpha_i| + \mathcal{O}(|\alpha_i| |C^\downarrow|), \\ v(\alpha_i) &< v(C^\downarrow_\pm) < v(C^{\downarrow'}). \end{aligned}$$

Suppose β is to the left of the interaction, then the variation in Q_2 is

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(\beta) - v(C^\downarrow_\pm) \right|^+ |C^\downarrow_\pm| - \left| v(\beta) - v(C^{\downarrow'}) \right|^+ |C^{\downarrow'}| - \left| v(\beta) - v(\alpha_i) \right|^+ |\alpha_i| \right).$$

For $v(\beta)$, $|v(\beta) - v(C^\downarrow_\pm)| < |v(\beta) - v(C^{\downarrow'})|$ and $|C^\downarrow_\pm| < |C^{\downarrow'}|$ hence this quantity is always negative. Suppose now that β is to the right of the interaction, then

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(C^{\downarrow'}) - v(\beta) \right|^+ |C^{\downarrow'}| - \left| v(C^\downarrow_\pm) - v(\beta) \right|^+ |C^\downarrow_\pm| - \left| v(\alpha_i) - v(\beta) \right|^+ |\alpha_i| \right),$$

and the worst case is $v(\beta) = v(C^\downarrow_\pm)$, for which we find

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left| v(C^{\downarrow'}) - v(C^\downarrow_\pm) \right| |C^{\downarrow'}| = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |C^\downarrow_\pm|).$$

In the third case, this shows that an a priori bound $\sum_\beta |\beta| \leq \mathcal{O}(|C^\downarrow_\pm|)$ is sufficient to show that $[Q]$ is decreasing.

The fourth and last interaction is $C^\downarrow_\pm R^\downarrow - C^\downarrow_\pm$ where α_i is a rarefaction. The states of interest imply $|C^\downarrow_\pm| < |C^\downarrow|$ and that the speeds are ordered

$$v(\alpha_i) < v(C^\downarrow_\pm) < v(C^\downarrow).$$

Recall also that only one wave is outgoing, so we trivially have $[Q_1] = -|v(C_\pm^\downarrow) - v(\alpha_i)| |\alpha_i| C_\pm^\downarrow$. Assume now that a weak wave β is located to the left of the interaction, then the least favorable case corresponds to the situation where $v(\beta) = v(C_\pm^\downarrow)$, and

$$[Q_2]_\beta \leq |\beta| \left(|v(C_\pm^\downarrow) - v(C_\pm^{\downarrow'})| |C_\pm^{\downarrow'}| - |v(C_\pm^\downarrow) - v(\alpha_i)| |\alpha_i| \right) = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| C_\pm^\downarrow).$$

If β is to the right, then the worst case is $v(\beta) = v(\alpha_i)$ and we have

$$[Q_2]_\beta \leq |\beta| \left(|v(C_\pm^{\downarrow'}) - v(\alpha_i)| |C_\pm^{\downarrow'}| - |v(C_\pm^\downarrow) - v(\alpha_i)| |C_\pm^\downarrow| \right) \leq 0.$$

In conclusion, four a priori bounds $\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|)$ imply that Q is decreasing by an amount $\mathcal{O}(|\alpha_i| |C_\pm^\downarrow|^2)$. \square

Lemme 3.3.12 (Case 4. $\alpha_i N_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} \alpha'_i$). *Consider at time t an interaction involving a weak wave α_i approaching N_\pm^\downarrow from the left with outgoing waves $N_\pm^{\downarrow'}$ and α'_i . If the perturbation satisfies an a priori bound of the form*

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|), \quad (3.3.65)$$

then

$$[Q] \leq -|\mathcal{O}(|\alpha_i| |N_\pm^\downarrow|^2)|.$$

DÉMONSTRATION. Whether α_i is a shock or a rarefaction, we find

$$[Q_1] = -|v(\alpha_i) - v(N_\pm^\downarrow)|^+ |\alpha_i| \cdot |N_\pm^\downarrow| = -\mathcal{O}(|\alpha_i| |N_\pm^\downarrow|^2). \quad (3.3.66)$$

When α_i is a rarefaction, then we have

$$|N_\pm^{\downarrow'}| < |N_\pm^\downarrow|, \quad |\alpha'_i| < |\alpha_i|,$$

and the inequalities on the speeds

$$v(N_\pm^{\downarrow'}) < v(N_\pm^\downarrow) < \min \{v(\alpha_i), v(\alpha'_i)\}.$$

Using the observations above, we verify that if a weak wave β is located to the left of the interaction then

$$\begin{aligned} [Q_2]_\beta = & |\beta| \left(|v(\beta) - v(N_\pm^{\downarrow'})|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + |v(\beta) - v(\alpha'_i)|^+ |\alpha'_i| \right. \\ & \left. - |v(\beta) - v(N_\pm^\downarrow)|^+ |N_\pm^\downarrow| - |v(\beta) - v(\alpha_i)|^+ |\alpha_i| \right). \end{aligned}$$

The largest value of $[Q_2]$ occurs when $v(\beta) = v(N_\pm^\downarrow)$, in which case

$$[Q_2]_\beta = |\beta| |v(N_\pm^\downarrow) - v(N_\pm^{\downarrow'})| |N_\pm^{\downarrow'}| = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |N_\pm^\downarrow|).$$

When a weak wave β is located to the right of the interaction, then

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(N_\pm^\downarrow) - v(\beta) \right|^+ |N_\pm^\downarrow| + \left| v(\alpha'_i) - v(\beta) \right|^+ |\alpha'_i| \right. \\ \left. - \left| v(N_\pm^\downarrow) - v(\beta) \right|^+ |N_\pm^\downarrow| - \left| v(\alpha_i) - v(\beta) \right|^+ |\alpha_i| \right).$$

We find the largest value by taking $v(\beta) = v(\alpha_i)$

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left| v(\alpha'_i) - v(\alpha_i) \right| |\alpha'_i| = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |N_\pm^\downarrow|).$$

Once again, $[Q]$ is decreasing if all weak waves satisfy a condition $\sum |\beta| \leq \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|)$.

We now consider the interaction $\alpha_i N_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} \alpha'_i$ where α_i is a shock. We saw in the proof of Lemma 3.3.5 that

$$|N_\pm^\downarrow| < |N_\pm^{\downarrow'}|, \quad |\alpha'_i| < |\alpha_i|.$$

For this interaction, we have

$$v(N_\pm^\downarrow) < v(N_\pm^{\downarrow'}) < \min \{v(\alpha_i), v(\alpha'_i)\}.$$

For the functional $[Q_2]$, when there is a weak wave β located to the left of the interaction, we have

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(\beta) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(\beta) - v(\alpha'_i) \right|^+ |\alpha'_i| \right. \\ \left. - \left| v(\beta) - v(N_\pm^\downarrow) \right|^+ |N_\pm^\downarrow| - \left| v(\beta) - v(\alpha_i) \right|^+ |\alpha_i| \right).$$

The worst case occurs when $v(\alpha'_i) < v(\alpha_i) = v(\beta)$, and

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(\alpha_i) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right| |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(\alpha_i) - v(\alpha'_i) \right| |\alpha'_i| - \left| v(\alpha_i) - v(N_\pm^\downarrow) \right| |N_\pm^\downarrow| \right) \\ = |\beta| \left(\left| v(\alpha_i) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right| (|N_\pm^{\downarrow'}| - |N_\pm^\downarrow|) - \left| v(N_\pm^{\downarrow'}) - v(N_\pm^\downarrow) \right| |N_\pm^\downarrow| + \left| v(\alpha_i) - v(\alpha'_i) \right| |\alpha'_i| \right) \\ = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |N_\pm^\downarrow|).$$

In a similar way, it is easy to verify that if there is a weak wave β located to the right of the interaction, the least favorable case is $v(\beta) = v(N_\pm^{\downarrow'}) < v(\alpha_i) < v(\alpha'_i)$

$$[Q_2]_\beta = |\beta| \left(\left| v(N_\pm^{\downarrow'}) - v(\beta) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(\alpha'_i) - v(\beta) \right|^+ |\alpha'_i| \right. \\ \left. - \left| v(N_\pm^\downarrow) - v(\beta) \right|^+ |N_\pm^\downarrow| - \left| v(\alpha_i) - v(\beta) \right|^+ |\alpha_i| \right) \\ = |\beta| \left(\left| v(\alpha'_i) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right| |\alpha'_i| - \left| v(N_\pm^\downarrow) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right| |N_\pm^\downarrow| - \left| v(\alpha_i) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right| |\alpha_i| \right) \\ = \mathcal{O}(|\beta| |\alpha_i| |N_\pm^\downarrow|).$$

□

Lemme 3.3.13 (Case 5. $\beta_j C_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$ or $C_\pm^\downarrow \beta_j \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$). Consider at time t an interaction between a weak wave β_j , $j \neq i$, with a strong classical shock C_\pm^\downarrow that leads to a splitting $N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$. If the perturbation satisfies an a priori bound

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(1), \quad (3.3.67)$$

then

$$[Q] = -\left| \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|) \right|.$$

DÉMONSTRATION. The interaction between the weak wave β_j , $j \neq i$, with C_\pm^\downarrow leads to $N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'}$. For this interaction, $|C_\pm^\downarrow| = |N_\pm^{\downarrow'}| + |C^{\uparrow'}| + \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|)$ and the wave speeds are all close,

$$v(C_\pm^\downarrow) = v(N_\pm^{\downarrow'}) + \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|) = v(C^{\uparrow'}) + \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|).$$

First of all, we have

$$[Q_1] = -\left| v(\beta_j) - v(C_\pm^\downarrow) \right| \cdot |C_\pm^\downarrow| \cdot |\beta_j| = -\left| \mathcal{O}(|\beta_j| |C_\pm^\downarrow|) \right|.$$

Let γ be a weak wave at $x < y$ interacting with a strong wave. Then

$$\begin{aligned} [Q_2]_\beta &= |\gamma| \cdot \left[\left| v(\gamma) - v(N_\pm^{\downarrow'}) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(\gamma) - v(C^{\uparrow'}) \right|^+ |C^{\uparrow'}| - \left| v(\gamma) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| \right] \\ &= |\gamma| \cdot \left| v(\gamma) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ \left[|N_\pm^{\downarrow'}| + |C^{\uparrow'}| - |C_\pm^\downarrow| \right] + \mathcal{O}(|\gamma| |\beta_j| |C_\pm^\downarrow|) \\ &= \mathcal{O}(|\gamma| \cdot |\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|). \end{aligned}$$

Similarly, if γ is a weak wave to the right of the interaction, we have

$$\begin{aligned} [Q_2]_\beta &= |\gamma| \cdot \left[\left| v(N_\pm^{\downarrow'}) - v(\gamma) \right|^+ |N_\pm^{\downarrow'}| + \left| v(C^{\uparrow'}) - v(\gamma) \right|^+ |C^{\uparrow'}| - \left| v(C_\pm^\downarrow) - v(\gamma) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| \right] \\ &= \mathcal{O}(|\gamma| \cdot |\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|). \end{aligned}$$

By imposing an a priori condition on $\sum |\gamma| \leq \mathcal{O}(1)$ we can conclude that

$$[Q] \leq -\left| \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|) \right|.$$

□

Lemme 3.3.14 (Case 6. $\beta_j N_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} \beta'_j$ or $N_\pm^\downarrow \beta_j \rightarrow \beta'_j N_\pm^{\downarrow'}$). Consider at time t an interaction between a weak wave β_j , $j \neq i$ with a strong classical shock N_\pm^\downarrow that leaves of the nonclassical shock unperturbed. If the perturbation satisfies an a priori bound

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(1), \quad (3.3.68)$$

then

$$[Q] = -\left| \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |N_\pm^\downarrow|) \right|.$$

DÉMONSTRATION. The weak wave β_j from the j -th family crosses N_{\pm}^{\downarrow} from the left ($j > i$) or from the right ($j < i$), possibly generating weak secondary waves of strength $\mathcal{O}(|\beta_j||N_{\pm}^{\downarrow}|)$. We have the identity

$$|N_{\pm}^{\downarrow}| = |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}|).$$

During such an interaction

$$[Q_1] = -\left|v(\beta_j) - v(N_{\pm}^{\downarrow})\right| \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j| = -\left|\mathcal{O}(|\beta_j||N_{\pm}^{\downarrow}|)\right|.$$

For a weak wave γ interacting from the left

$$\begin{aligned} [Q_2] &= |\gamma| \cdot \left[\left|v(\gamma) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})\right|^+ |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \left|v(\gamma) - v(\beta_j')\right|^+ |\beta_j'| - \left|v(\gamma) - v(N_{\pm}^{\downarrow})\right|^+ |N_{\pm}^{\downarrow}| \right] \\ &= |\gamma| \left|v(\gamma) - v(N_{\pm}^{\downarrow})\right|^+ \left[|N_{\pm}^{\downarrow'}| - |N_{\pm}^{\downarrow}| \right] + \mathcal{O}(|\gamma| \cdot |\beta_j| \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}|) \\ &\leq \mathcal{O}(|\gamma| \cdot |\beta_j| \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}|). \end{aligned}$$

If γ is a weak wave coming from the right and interacting with the strong wave, we have

$$\begin{aligned} [Q_2] &= |\gamma| \cdot \left[\left|v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - v(\gamma)\right|^+ |N_{\pm}^{\downarrow'}| + \left|v(\beta_j') - v(\gamma)\right|^+ |\beta_j'| - \left|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(\gamma)\right|^+ |N_{\pm}^{\downarrow}| \right] \\ &\leq \mathcal{O}(|\gamma| \cdot |\beta_j| \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}|). \end{aligned}$$

In conclusion, the usual a priori condition $\sum |\gamma| \leq \mathcal{O}(1)$ implies that

$$[Q] = [Q_1] + [Q_2] = -\left|\mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |N_{\pm}^{\downarrow}|)\right|.$$

□

Lemme 3.3.15 (Case 7. $\beta_j C \rightarrow C' \beta_j'$ or $C \beta_j \rightarrow \beta_j' C'$). *Consider at time t a weak wave β_j belonging to the family $j \neq i$ and crossing $C = C_{\pm}^{\downarrow}$ or C^{\uparrow} . Then if the perturbation satisfies*

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(1), \quad (3.3.69)$$

then

$$[Q] = -\left|\mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C|)\right|.$$

DÉMONSTRATION. Consider first the situation when $C = C_{\pm}^{\downarrow}$. We have the following estimates,

$$|C_{\pm}^{\downarrow}| = |C_{\pm}^{\downarrow'}| + \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C_{\pm}^{\downarrow}|), \quad v(C_{\pm}^{\downarrow}) = v(C_{\pm}^{\downarrow'}) + \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C_{\pm}^{\downarrow}|).$$

We observe that

$$[Q_1] = -\left|v(\beta_j) - v(C_{\pm}^{\downarrow})\right| \cdot |C_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_j| = -\left|\mathcal{O}(|\beta_j||C_{\pm}^{\downarrow}|)\right|.$$

For a weak wave γ interacting from the left

$$\begin{aligned} [Q_2] &= |\gamma| \cdot \left[\left| v(\gamma) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| - \left| v(\gamma) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| \right] \\ &= |\gamma| \cdot \left| v(\gamma) - v(C_\pm^\downarrow) \right|^+ \left[|C_\pm^\downarrow| - |C_\pm^\downarrow| \right] + \mathcal{O}(|\gamma| \cdot |\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|) \\ &\leq \mathcal{O}(|\gamma| \cdot |\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|). \end{aligned}$$

If γ is a weak wave coming from the right and interacting with the nonclassical wave, then the same argument shows that

$$[Q_2] = |\gamma| \cdot \left[\left| v(C_\pm^\downarrow) - v(\gamma) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| - \left| v(C_\pm^\downarrow) - v(\gamma) \right|^+ |C_\pm^\downarrow| \right] \leq \mathcal{O}(|\gamma| \cdot |\beta_j| \cdot |C_\pm^\downarrow|).$$

The required a priori condition is again of the form $\epsilon(t) = \sum |\gamma| \leq \mathcal{O}(1)$.

We now study the case when $C = C^\uparrow$ and we begin with the estimates.

$$|C^\uparrow| = |C^{\uparrow'}| + \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C^\uparrow|), \quad (C^\uparrow) = v(C^{\uparrow'}) + \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C^\uparrow|).$$

During this interaction,

$$[Q_1] = -\left| v(\beta_j) - v(C^\uparrow) \right| \cdot |C^\uparrow| \cdot |\beta_j| = -\left| \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C^\uparrow|) \right|.$$

The same proofs as in the last two lemmas show that when an a priori condition $\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(1)$ holds, then

$$[Q] = [Q_1] + [Q_2] = -\left| \mathcal{O}(|\beta_j| \cdot |C^\uparrow|) \right|.$$

□

3.3.5. Global estimates

We now possess all the required estimates for interactions within splitting-merging solutions. We need to find a constant K for which $W + KQ$ is decreasing during all interactions. We now reinterpret Theorem 3.3.1 and state the a priori conditions on the perturbation $\epsilon(t)$ and on the constants k_*^{\leq}, K required in the proof.

Constraints on the weights in W

The key is to choose the constants K, k_* and k_*^{\leq} in such a way that waves crossing through the strong shocks lead to decreases in $W + KQ$. The analysis of the various interactions, to be presented immediately below, will lead to the following constraints on these constants.

W1. The constants k_L, k_M and k_R must satisfy

$$k_L > (1 + C_i)k_M. \quad (3.3.70)$$

W2. The weights $k_L^<, k_M^<$ and $k_R^<$ must satisfy

$$k_L^< < k_M^< < k_R^<, \quad (3.3.71)$$

W3. The weights $k_L^>, k_M^>$ and $k_R^>$ must satisfy

$$k_L^> > k_M^> > k_R^>, \quad (3.3.72)$$

Lemme 3.3.16. *Assuming only property (H4) of the kinetic function Φ_i^b , the conditions on the weights (3.3.70)-(3.3.72) can be satisfied independently of the size $\epsilon(t)$ of the perturbation, of the strength of the non-classical shock and of the constant K . For each $\zeta > 0$, one such a choice is given by*

$$\begin{aligned} k_L &= 1 + C_i + \zeta, & k_M &= 1, & k_R &= 1, \\ k_L^< &= 1 - \zeta, & k_M^< &= 1, & k_R^< &= 1 + \zeta, \\ k_L^> &= 1 + \zeta, & k_M^> &= 1, & k_R^> &= 1 - \zeta. \end{aligned} \quad (3.3.73)$$

DÉMONSTRATION. The validity of the proposed values for the constants can be verified by inspection. \square

Constraints on the perturbation

We present conditions that the perturbation $\epsilon(t)$ must satisfy at all times t .

P1. Lemmas 3.3.9-3.3.12 require the following constraints

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|), \quad (3.3.74)$$

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|C^\uparrow|), \quad (3.3.75)$$

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|). \quad (3.3.76)$$

Lemmas 3.3.9 and 3.3.11 require two different bounds of the form (3.3.74).

P2. Lemmas 3.3.13-3.3.15 require three different bounds of the form

$$\epsilon(t) \leq \mathcal{O}(1). \quad (3.3.77)$$

The functions involved in the \mathcal{O} bounds (3.3.74)-(3.3.77) are all the result of quadratic terms in Glimm's interaction estimates, Theorem 3.3.3.

Constraints on the weights in $W + KQ$

The following fundamental constraints are required to insure that decreases in the interaction potential compensate for the introduction of spurious second-order waves during each interaction. The analysis of the various interactions, to be presented immediately below, will lead to the following constraints on these constants.

Q1. The weight K on the interaction potential must satisfy

$$k_L^< + k_R^> < K \left| \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right|, \quad (3.3.78)$$

$$k_M^< + k_R^> < K \left| \mathcal{O}(|C^\uparrow|) \right|, \quad (3.3.79)$$

$$k_M + k_L^< + k_M^> < K \left| \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|) \right|, \quad (3.3.80)$$

$$k_L^< + k_R^> < K \left| \mathcal{O}(1) \right|, \quad (3.3.81)$$

$$k_M + k_L^< + k_M^> < K \left| \mathcal{O}(1) \right|, \quad (3.3.82)$$

$$k_M^< + k_R^> < K \left| \mathcal{O}(1) \right|. \quad (3.3.83)$$

We now summarize our earlier estimates by combining, case by case, the estimates for the total variation, Lemmas 3.3.2-3.3.7, with the estimates for the interaction potential, Lemmas 3.3.9-3.3.15. Each time, we will indicate which assumptions on the weights W1.-W3., the perturbation P1.-P2. and on the interaction potential Q1. are required to show that $[W + KQ]$ is negative. We have already showed in Lemma 3.3.16 that the constraints on the weights can be satisfied. As should be clear, for the moment we have not demonstrated that $\epsilon(t) = \text{TV}(v_0(t, \cdot))$ is a priori bounded in time. The estimates summarized below are only valid at the time t of a fixed interaction, and show that for the strength $\epsilon(t)$ of the perturbation at that time, the constants can be adjusted to insure that $W + KQ$ will decrease during that interaction. We will eventually have to show that the bounds on the perturbation can be satisfied uniformly in time.

Case 1 : $(\alpha_i C_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^\downarrow C^\uparrow \text{ or } C_\pm^\downarrow \alpha_i \rightarrow N_\pm^\downarrow C^\uparrow)$. In Lemma 3.3.2, we showed that α_i is faster than C_\pm^\downarrow , then

$$[W] = |\alpha_i| \left(-k_L + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(C_\pm^\downarrow) \right),$$

while Lemma 3.3.9 has that $[Q] = -|\mathcal{O}(|\alpha_i| |C_\pm^\downarrow|^2)|$ when (3.3.74) is imposed.

Therefore, if the constraint (3.3.78) is satisfied, then $W + KQ$. Similarly, Lemma 3.3.2 showed that when α_i is slower than C_\pm^\downarrow , then

$$[W] = |\alpha_i| \left(-k_R + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(C_\pm^\downarrow) \right)$$

Assuming that the perturbation satisfies an a priori bound (3.3.74), then $[Q] = -|\mathcal{O}(|\alpha_i| |C_\pm^\downarrow|^2)|$. For weights satisfying (3.3.78), then $[W + KQ]$ is negative.

Case 2 : $(N_\pm^\downarrow C^\uparrow \rightarrow C_\pm^\downarrow)$. For the strong interaction $N_\pm^\downarrow C^\uparrow \rightarrow C_\pm^\downarrow$ Lemma 3.3.3 stated that

$$[W] = (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| |C^\uparrow| |v(N_\pm^\downarrow) - v(C^\uparrow)|).$$

Lemma 3.3.10 states that if the inequality (3.3.75) is enforced, then $[Q]$ is negative but proportional to the same quantity, and therefore

$$[W + KQ] = \left(k_L^< + k_R^> - K|\mathcal{O}(1)| \right) \left| \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow||C^\uparrow||v(N_\pm^\downarrow) - v(C^\uparrow)|) \right|.$$

is negative if K is chosen to satisfy an a priori bound of the form (3.3.81).

Case 3 : $(\alpha_i C \rightarrow C' \text{ or } C\alpha_i \rightarrow C')$. According to Lemma 3.3.4, we have that if the weak wave crosses the classical strong shock $C = C_\pm^\downarrow$ from the left, then

$$[W] = |\alpha_i| \left(-k_L + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right).$$

Lemma 3.3.11 shows that if (3.3.74) holds, then $[Q] = -|\mathcal{O}(|\alpha_i||C_\pm^\downarrow|^2)|$.

Therefore, if the constraint (3.3.78) is satisfied, then the variation

$[W + KQ] \leq -k_L|\alpha_i|$ is strictly negative.

If the weak wave α_i crosses $C = C_\pm^\downarrow$ from the right, then Lemma 3.3.4 states that the change in W is

$$[W] = |\alpha_i| \left(-k_R + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right).$$

Again, $[Q] = -|\mathcal{O}(|\alpha_i||C_\pm^\downarrow|^2)|$ when (3.3.74) holds, and so

$$[W + KQ](t) \leq -k_R|\alpha_i| \tag{3.3.84}$$

when the bound (3.3.78) holds.

Suppose now that $C = C^\uparrow$ is a classical shock. If α_i crosses C^\uparrow from the left, then lemmas 3.3.4 and 3.3.11 state

$$\begin{aligned} [W] &= |\alpha_i| \left(-k_M + (k_M^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C^\uparrow|) \right), \\ [Q] &= -|\mathcal{O}(|\alpha_i||C^\uparrow|^2)|. \end{aligned}$$

If the constraint (3.3.79) is satisfied a priori, then $[W + KQ] \leq -k_M|\alpha_i|$ is negative.

Similarly, if α_i comes from the right, then

$$[W] = |\alpha_i| \left(-k_R + (k_M^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C^\uparrow|) \right).$$

Using the estimate for $[Q]$ from Lemma 3.3.11 and the a priori condition (3.3.79), we conclude that $[W + KQ] \leq -k_R|\alpha_i|$ is strictly decreasing.

Case 4 : $(\alpha_i N_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} \alpha'_i)$. According to Lemma 3.3.5 and Lemma 3.3.12

$$\begin{aligned} [W] &= |\alpha_i| \left(-(k_L - \text{sign}(\alpha_i)k_M) + C_i k_M + (k_M + k_L^< + k_M^>) \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|) \right), \\ [Q] &= -|\mathcal{O}(|\alpha_i||N_\pm^\downarrow|^2)|, \end{aligned}$$

where the last bound required (3.3.76). We impose the bound (3.3.70) and the constraint (3.3.80) on K and these imply that

$$[W + KQ] \leq \left(-k_L + (1 + C_i)k_M \right) |\alpha_i|. \quad (3.3.85)$$

Case 5 : $(\beta_j C_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'} \text{ or } C_\pm^\downarrow \beta_j \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'})$. Lemma 3.3.6 and Lemma 3.3.14 states that when a weak wave β_j , with $j > i$, approaches C_\pm^\downarrow from the left, and if the perturbation satisfies (3.3.77), then

$$\begin{aligned} [W] &= |\beta_j| \left(-k_L^> + k_R^> + (k_L^< + k_R^>) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right), \\ [Q] &= - \left| \mathcal{O}(|\beta_j| |C_\pm^\downarrow|) \right|. \end{aligned}$$

The linear terms in $[W]$ must control the possible increase in $[Q]$ and so we balance the terms as

$$[W + KQ] = |\beta_j| \left\{ -k_L^> + k_R^> + \left(k_L^< + k_R^> - K|\mathcal{O}(1)| \right) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right\}.$$

We impose the zero-th order bound (3.3.72) the a priori condition (3.3.78) so that $W + KQ$ becomes decreasing.

Similarly, if β_j is a weak wave approaching C_\pm^\downarrow from the right and the perturbation is small in the sense of (3.3.77), then

$$[W + KQ] = |\beta_j| \left\{ -k_R^< + k_L^< + \left(k_L^< + k_R^> - K\mathcal{O}(1) \right) \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|) \right\}.$$

The conditions and (3.3.71) and (3.3.81) are sufficient to make the decreasing functional.

Case 6 : $(\beta_j N_\pm^\downarrow \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} \beta_j' \text{ or } N_\pm^\downarrow \beta_j \rightarrow N_\pm^{\downarrow'} \beta_j')$. Consider first the interaction with β_j initially to the left of N_\pm^\downarrow . Lemmas 3.3.7 and 3.3.15 state that with the condition (3.3.77), then

$$\begin{aligned} [W] &= |\beta_j| \left(-k_L^> + k_M^> + (k_M + k_L^< + k_M^>) \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|) \right), \\ [Q] &= - \left| \mathcal{O}(|\beta_j| |N_\pm^\downarrow|) \right|. \end{aligned}$$

To balance these terms, we must examine

$$[W + KQ] = |\beta_j| \left\{ -k_L^> + k_M^> + \left(k_M + k_L^< + k_M^> - K|\mathcal{O}(1)| \right) \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|) \right\}.$$

This functional is decreasing if we further assume that conditions (3.3.72) and (3.3.82) holds, and the exact decrease is

$$[W + KQ] \leq \left(-k_L^> + k_M^> \right) |\beta_j|. \quad (3.3.86)$$

Similarly, when β_j is initially to the right of N_{\pm}^{\downarrow} , then we impose the bound (3.3.77) to deduce

$$[W + KQ] = |\beta_j| \left\{ -k_M^< + k_L^< + (k_M + k_L^< + k_M^> - K|\mathcal{O}(1)|) \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}|) \right\}$$

and then we conclude that this is negative if conditions (3.3.71) and (3.3.82) holds. In fact, the amount of decrease is

$$[W + KQ] \leq (-k_M^< + k_L^<) |\beta_j|. \quad (3.3.87)$$

Case 7 : $(\beta_j C \rightarrow C' \beta'_j \text{ or } C \beta_j \rightarrow \beta'_j C')$. When the weak wave β_j is incoming from the left and $C = C_{\pm}^{\downarrow}$, then using lemmas 3.3.7 and 3.3.15 under the assumption (3.3.77), we find

$$[W + KQ] = |\beta_j| \left\{ -k_L^> + k_R^> + (k_L^< + k_R^> - K|\mathcal{O}(1)|) \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) \right\} \leq -k_L^> |\beta_j|.$$

which requires the inequality (3.3.72) and the a priori condition (3.3.81) in order to imply that it is strictly negative.

Similarly, for right incoming weak waves and $C = C_{\pm}^{\downarrow}$ and (3.3.77), we have

$$[W + KQ] = |\beta_j| \left\{ -k_R^< + k_L^< + (k_L^< + k_R^> - K|\mathcal{O}(1)|) \mathcal{O}(|C_{\pm}^{\downarrow}|) \right\}.$$

This quantity is negative if the additional conditions (3.3.71) and (3.3.81) holds, in which case the decrease is

$$[W + KQ] \leq (-k_R^< + k_M^<) |\beta_j|.$$

The last two interactions covered by Case 7. involve either a left incoming β_j or a right incoming β_j interacting with $C = C^{\uparrow}$, in which case the a priori bound (3.3.77) implies respectively

$$[W + KQ] = |\beta_j| \left\{ -k_M^> + k_R^> + (k_M^< + k_R^> - K|\mathcal{O}(1)|) \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|) \right\} \leq (-k_M^> + k_R^>) |\beta_j|. \quad (3.3.88)$$

or

$$[W + KQ] = |\beta_j| \left\{ -k_R^< + k_M^< + (k_M^< + k_R^> - K|\mathcal{O}(1)|) \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|) \right\} \leq (-k_R^< + k_M^<) |\beta_j| \quad (3.3.89)$$

The functional $W + KQ$ is strictly decreasing, as written above, if the bounds (3.3.72), (3.3.71) and (3.3.83) are satisfied.

PROOF OF THEOREM 3.3.1. The remaining steps in the proof of existence of a weak solution using front-tracking approximations are similar in every published proof [68, 11] and we will only sketch the final argument. The key step is to demonstrate that the family of front-tracking approximations, parameterized by

h , possesses a convergent subsequence that converges as $h \rightarrow 0$. The proof that the limit is a weak solution is straightforward and will be omitted. Recall that h is a bound on the strength of rarefaction-shocks, on the errors in the propagation speeds of those discontinuities, and on the approximation of the initial data. The bound ϵ on the size of the perturbation (3.3.4) is not to be confused with the parameter h .

We begin by choosing the state $u_* \in \mathcal{B}(\delta_1)$ so that $\Phi_i^\sharp(u_*)$ and $\Phi_i^\flat(u_*)$ are also in $\mathcal{B}(\delta_1)$. The euclidean distance in phase-space is equivalent to the generalized shock strength, hence the simple bound

$$\|v_0\|_{L^\infty} \leq \kappa_1 \text{TV}(v_0) < \kappa_1 \epsilon$$

can be used to ensure that all states in $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$ belong to $\mathcal{B}(\delta_1)$. To simplify the notation, the function $\epsilon(t)$ will denote the size of the perturbation in TV, that is the size of the splitting-merging solution after subtracting the strong waves. The quasi-norm TV always satisfies

$$\epsilon(t) \leq \kappa_2 W(u(t)) \leq \kappa_2 (W + KQ)(u(t)),$$

but the inverse inequality

$$\kappa_3 (W + KQ)(u(t)) \leq \epsilon(t),$$

requires an a priori bound of the form $KW \leq \kappa_4$ for some constant κ_4 . The constant K must satisfy the a priori lower bounds Q1, namely (3.3.78)-(3.3.83), but since Lemma 3.3.16 shows that for $\zeta < 1/2$ the lower bounds are all at most 3, these bounds can be rewritten as

$$3 \leq K \sup_{u \in \mathcal{B}(\delta_1)} \left\{ \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|C^\downarrow|) \right\}. \quad (3.3.90)$$

Let the dependence of the right hand side on the wave strength be summarized by

$$F_1(|C_\pm^\downarrow|, |N_\pm^\downarrow|, |C^\downarrow|) := \sup_{u \in \mathcal{B}(\delta_1)} \left\{ \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|C^\downarrow|) \right\}.$$

Combined with the bound $\text{TV} \leq \kappa_2 W$, the constraint $KW \leq 1/2$ means that $\epsilon(t)$ must decrease as K decreases from the constraint (3.3.90). On the other hand, constraints P1. and P2. also require the total variation of the perturbation to decrease as the size of the strong waves decreases,

$$\epsilon(t) \leq \sup \left\{ \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|C^\downarrow|) \right\}, \quad (3.3.91)$$

where we again introduce some notation for the dependence on the waves

$$F_2(|C_\pm^\downarrow|, |N_\pm^\downarrow|, |C^\downarrow|) := \sup_{u \in \mathcal{B}(\delta_1)} \left\{ \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|C^\downarrow|) \right\}.$$

Taking (3.3.90) and (3.3.91) together, we have

$$KW \leq K \cdot \frac{\epsilon(t)}{\kappa_3} \leq \frac{3}{\kappa_3} \cdot \frac{F_2(|C_\pm^\downarrow|, |N_\pm^\downarrow|, |C^\downarrow|)}{F_1(|C_\pm^\downarrow|, |N_\pm^\downarrow|, |C^\downarrow|)}.$$

By uniform continuity over $\mathcal{B}(\delta_1)$, the ratio F_2/F_1 is uniformly bounded and hence there exists a constant κ_4 for which $KW \leq \kappa_4$. The equivalence between TV and $W + KQ$ is therefore uniform in the strength of the strong waves.

Assume that the state u_* is fixed and thus, the strength of the strong waves are only small perturbations of the initial configuration \bar{u}_0 . Under these conditions, $(W + KQ)(u(t))$ is monotone decreasing and therefore bounded until the approximation leads to states outside $\mathcal{B}(\delta_1)$. Since $(W + KQ)(u(t))$ is equivalent to $\text{TV}(u(t) - \bar{u}_0)$, at the cost of further restricting $\text{TV}(v_0)$, the boundedness of $W + KQ$ implies that the approximation cannot grow in L^∞ outside of $\mathcal{B}(\delta_1)$. Glimm's functional is therefore bounded for all time. The front-tracking approximations are thus continuous with respect to time in $L^1(\mathbb{R})$, and uniformly bounded in TV and L^∞ . Helley's Theorem therefore provides a subsequence $\{h_k\}_k$ converging to zero for which u_{h_k} converges in $L^1_{\text{loc}} \cap \text{BV}$. \square

PROOF OF THEOREM 3.3.2. The proof is almost identical to the earlier proof, except in this case we need to propose an explicit relation between the strength of the perturbation and the strength of the strong shocks.

Consider now the case where the initial state $u_*^{(k)}$ belongs to a sequence in $\mathcal{B}(\delta_1)$ that converges to a single point on the manifold \mathcal{M}_i where the wave speed λ_i has a critical point. For each index k , we may assume that the states $\Phi_i^\sharp(u_*^{(k)})$ and $\Phi_i^\flat(u_*^{(k)})$ are also in $\mathcal{B}(\delta_1)$. The uniform $\mathcal{O}(1)$ bounds for K and the total variation continue to hold. In the proof of Theorem 3.3.1, we saw that as the strength of the strong shock decreases, then the strength of the perturbation must decrease while the weight K must increase. Nevertheless, these quantities can be balanced so that their product ϵK remains bounded, hence the quasi-norm TV and $W + KQ$ can be shown to be equivalent.

Constraints P1. are summarized by the condition

$$\epsilon(t) \leq \sup_{u \in \mathcal{B}(\delta_1)} \left\{ \mathcal{O}(|C_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow|), \mathcal{O}(|C^\downarrow|) \right\}.$$

The strength of these strong waves depends only on the left-hand state of C_\pm^\downarrow , or N_\pm^\downarrow , and these strengths are all uniform ratios of each other since Φ_i^\sharp and Φ_i^\flat are Lipschitz. It therefore follows that the previous constraint can be replaced by simpler inequality

$$\epsilon \leq \kappa_* \delta_N,$$

if one considers the uniform maximum over $\mathcal{B}(\delta_1)$. The rest of the proof is the same as the one presented for Theorem 3.3.1. \square

3.4. SPLITTING-MERGING SOLUTIONS WITH NUCLEATION

The objective of this section is to show that splitting-merging solutions can only undergo a finite number of splitting-merging cycles when the creation of non-classical waves requires the more demanding nucleation condition; see Definition 3.2.15. This is a generalization of an earlier result by LeFloch and Shearer in the scalar case [48].

The proof does not follow the techniques of the earlier work [48], which nonetheless inspired preliminary work of two of the authors on the total variation for scalar laws [42], and hence the current definition of wave strength. The key step of the proof presented here is an extension of Lemma 5.2 from [42] which translates the nucleation condition into a lower bound on the signed variation of the waves crossing N_{\pm}^{\downarrow} and C^{\uparrow} during a single splitting-merging cycle. The proof therefore requires some careful accounting of all the waves which interact with, and ultimately remove, the non-classical wave.

This section begins with a description of the geometry and processes involved in a single splitting-merging cycle. The extension of Lemma 5.2 from [48] is then presented. The signed variation is introduced and related to the previous bound. We conclude the result by demonstrating that the total variation decreases during each splitting-merging by an amount proportional to the strength of the nucleation condition cycle, and therefore, that a splitting-merging solution for a finite perturbation can only undergo a finite number of splitting-merging cycles.

3.4.1. Nucleation and the splitting-merging cycle

This section contains a definition of nucleation, a statement of the main theorem, and a detailed description of the waves and interactions one can expect to see during a splitting-merging cycle.

The nucleation condition and its associated Riemann solver were defined in Section 3.2, and in particular in Lemma 3.2.1. For the sake of convenience, we repeat its definition. The nucleation condition assumes that there exists a C^2 function $\mu_i^n : \mathcal{B}(\delta_1) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying

$$\mu_i^{\sharp}(u) \leq \mu_i^n(u) \leq \mu_i^{\sharp}(u), \quad \forall u \in \mathcal{B}(\delta_1).$$

The nucleation criteria states that i -classical shocks are preferred over non-classical shocks if

$$|\mu_i(u_-) - \mu_i(u_+)| < |\mu_i(u_-) - \mu_i^n(u_-)|. \quad (3.4.1)$$

Lemma 3.2.1 describes the resulting Riemann solver. Furthermore, we will assume that $\mu_i^n(u_-) < \mu_i^\sharp(u_-)$ uniformly over $\mathcal{B}(\delta_1)$, that is to say that there exists a strictly positive constant η such that

$$\eta < |\mu_i^\sharp(u) - \mu_i^n(u)|, \quad \forall u \in \mathcal{B}(\delta_1).$$

We now proceed to state the main result of this section.

Théorème 3.4.1 (Finiteness of splitting–merging patterns under nucleation). *Given any strictly hyperbolic system (3.1.1) with genuinely nonlinear, linearly degenerate, or concave-convex characteristic families with a Riemann solver satisfying a nucleation condition, there exist constants κ_* and $\delta_* < \delta_0$ depending only upon the flux function and the constant C_i arising in (H4), so that the following property holds : for every family of kinetic mappings Φ_i^\flat associated with concave-convex families (indexed by i), provided they satisfy the conditions (H1)–(H4), any two wave pattern $(u_*, \Phi_i^\flat(u_*), \Phi_i^\sharp(u_*)) \in \mathcal{B}(\delta_*)^3$ (made of a classical shock and a nonclassical shock) can only undergo a finite number of splitting–merging cycles, that is, for every perturbation with total variation at most $\kappa_*\delta_N$, where δ_N is the strength of the unperturbed nonclassical shock, there exists a global-in-time solution $u = u(t, x)$ to (3.1.1) satisfying the initial condition (3.3.2) and possessing only a finite number of interactions $N_\pm^\flat C^\uparrow \longrightarrow C_\pm^\flat$.*

Before the nucleation condition can be related to the signed variation of the strong waves during one splitting–merging cycle, we need to identify all the waves involved in the interactions. Figure 3.13 illustrates the waves in a splitting–merging cycle. Suppose that a classical shock C_\pm^\flat interacts with a weak wave at time t_0 and splits into a non-classical shock $N_\pm^\flat(t_0+)$ and a faster classical shock $C^\uparrow(t_0+)$. The nucleation condition (3.4.1) is satisfied at time t_0 . We assume that the non-classical shock N_\pm^\flat persists until a time t_f at which the classical shock C^\uparrow crosses the non-classical shock and results in a single outgoing classical shock $C_\pm^\flat(t_f+)$. Suppose that the left-hand state of $N_\pm^\flat(t)$ at time t is denoted by $u_\ell(t)$ while the right-hand state of $C^\uparrow(t)$ is written as $u_r(t)$. Note that these are also the left and right-hand states of the classical shock C_\pm^\flat when it is present. Immediately after the splitting, the intermediate state $u_m(t_0+)$ is well-defined, just as $u_m(t_f-)$ is well-defined immediately prior to the merging.

Lemme 3.4.1. *When nucleation is present, a single splitting-merging cycle from $t = t_0$ to t_f satisfies*

$$\eta < \left(\mu_i(\Phi_i^\sharp(u_\ell(t_0+))) - \mu_i(\Phi_i^\sharp(u_\ell(t_f-))) \right) + \left(\mu_i(u_r(t_f-)) - \mu_i(u_r(t_0+)) \right). \quad (3.4.2)$$

DÉMONSTRATION. The nucleation condition states that

$$0 < \eta < \mu_i(\Phi_i^\sharp(u_\ell(t_0+))) - \mu_i(u_r(t_0+)), \quad (3.4.3)$$

while the subsequent merging requires that the speed of $N_\pm^\downarrow(t_f-)$ be greater than that of $C^\uparrow(t_f-)$, or more specifically

$$a(u_r(t_f-), u_m(t_f-)) < a(u_\ell(t_f-), \Phi_i^\flat(u_\ell(t_f-))) = a(\Phi_i^\sharp(u_\ell(t_f-)), \Phi_i^\flat(u_\ell(t_f-))). \quad (3.4.4)$$

Since $u_m(t_f-) = \Phi_i^\flat(u_\ell(t_f-))$, this inequality on the speeds is equivalent to

$$\mu_i(\Phi_i^\sharp(u_\ell(t_f-))) < \mu_i(u_r(t_f-)). \quad (3.4.5)$$

Taking (3.4.3) and (3.4.5) together, we obtain that each splitting-merging cycle with nucleation must satisfy (3.4.2). \square

Analysis of the two terms in (3.4.2) will require us to relate variations in N_\pm^\downarrow and C^\uparrow to the variation in $u_\ell(t)$ and $u_r(t)$. The left and right hand states can be modified by waves entering the region between the strong shocks, *but also by waves exiting it*. On the other hand, we will show that the strength of the waves exiting the domain is controlled by the strength of the waves entering the domain. It is this last part that will make the analysis a little bit messier than one would have hoped.

We now describe all the interactions with N_\pm^\downarrow and C^\uparrow that could modify the left and right-hand states. Let α_n^L , $n = 1, \dots, n^L$ be the i -waves that reach N_\pm^\downarrow from the left and let α_n^R , $n = 1, \dots, n^R$ be the i -waves that interact with C^\uparrow from the right. The weak waves $\{\alpha_n^L\}_n$ have interactions of Case 4. with N_\pm^\downarrow while the waves $\{\alpha_n^R\}_n$ have interactions with C^\uparrow of Case 3. Similarly, let $\tilde{\alpha}_n^R$, $n = 1, \dots, \tilde{n}^R$ be the i -waves crossing C^\uparrow from the left. Since N_\pm^\downarrow is an undercompressive, no i -waves can interact with it from the right.

Let $\beta_{j,n}^L$, $n = 1, \dots, n_j^L$ be the weak j -waves with $j > i$ that interact with N_\pm^\downarrow from the left and define $\beta_{j,n}^R$, $n = 1, \dots, n_j^R$ be the j -waves with $j < i$ interacting with C^\uparrow from the right. The waves $\beta_{j,n}^L$ have interactions described by Case 6. while the waves $\beta_{j,n}^R$ have interactions studied in Case 7. Let $\tilde{\beta}_{j,n}^L$, $n = 1, \dots, \tilde{n}_j^L$ be the

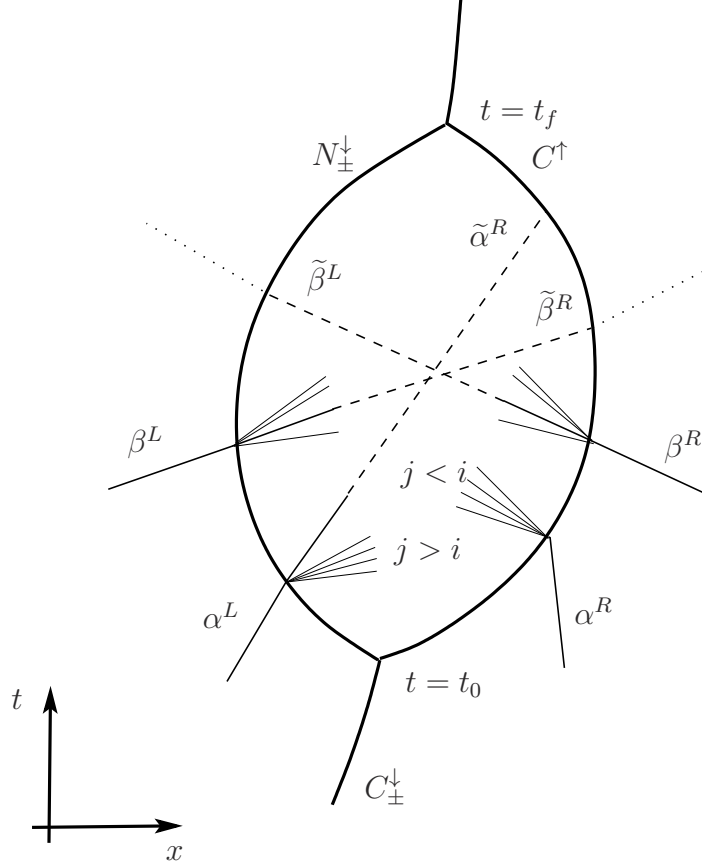


FIGURE 3.13. The following is an illustration of the trajectories of the waves involved in a single splitting-merging cycle. The α waves belong to the family i , the non-convex family, and the β waves are those belonging to families $j \neq i$.

j -waves with $j < i$ interacting with N^\downarrow_\pm from the right and let $\tilde{\beta}_{j,n}^R, n = 1, \dots, \tilde{n}_j^R$ be the j -waves with $j > i$ reaching C^\uparrow from the left.

Observe that the interactions of N^\downarrow_\pm and C^\uparrow with the waves $\alpha^L, \alpha^R, \tilde{\alpha}^R, \beta^L, \tilde{\beta}^L, \beta^R, \tilde{\beta}^R$ generate new weak i -waves but all waves α^*, β^* generate j -waves between N^\downarrow_\pm and C^\uparrow . These secondary weak waves will need to be accounted for. Finally, recall our earlier notation $y^h(t)$ for the position of N^\downarrow_\pm , $z^h(t)$ for the position of C^\uparrow and $\Gamma \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ for the region between these shocks.

The objective is to demonstrate that

$$[W + KQ]_{t_0+}^{t_f-} \leq -\eta < 0, \quad (3.4.6)$$

since it will imply that if $W + KQ$ is a priori bounded in time, and therefore that the splitting-merging cycles can only occur a finite number of times. As Lemma 3.4.1 indicates, the quantity $-\eta$ can be bounded below by the total change in u_ℓ and u_r , which is itself, up to linear terms, the sum of the strengths of the waves

crossing N_{\pm}^{\downarrow} and C^{\uparrow} during one splitting-merging cycle; see Lemma 3.4.2. The key observation is that waves crossing N_{\pm}^{\downarrow} from the left will belong to families $j \geq i$ and waves crossing C^{\uparrow} will belong to families $j < i$, hence the signed variation of the i -waves crossing N_{\pm}^{\downarrow} will be the same as the signed variation of the i -waves interacting with C^{\uparrow} from the left. The trick will be to correctly account for changes in Q that allow us to reduce the interactions to linear superpositions.

The change in $W + KQ$ is the sum of the changes during all interactions occurring between time t_0+ and t_f- . Our earlier work has already shown that $[W + KQ]$ is always negative during these interactions but we will examine only interactions involving at least one wave among $N_{\pm}^{\downarrow}, C^{\uparrow}$ and the waves in Γ . The other interactions will lead to arbitrary decreases in $W + KQ$ that cannot be controlled.

Weak interactions with N_{\pm}^{\downarrow}

We begin by examining only interactions between i -waves α_n^L and N_{\pm}^{\downarrow} . These cross N_{\pm}^{\downarrow} and a fraction of the wave continues to travel in Γ . Secondary waves of families $j < i$ are created and propagate left of N_{\pm}^{\downarrow} while secondary waves of families $j > i$ propagate into Γ . Lemmas 3.3.5 and 3.3.12 quantify these interactions, which are then summarized in (3.3.85),

$$[W + KQ] \leq \left(-k_L + (1 + C_i)k_M \right) |\alpha_n^L|. \quad (3.4.7)$$

Similar calculations show that

$$[\mu_i(u_{\ell})] = -\text{sign}(\alpha_n^L) |\alpha_n^L| + \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_n^L|), \quad [\mu_j(u_{\ell})] = \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\alpha_n^L|), \quad j \neq i, \quad (3.4.8)$$

where $\text{sign}(\alpha) = -1$ if α is a shock and $+1$ if α is a rarefaction.

Treating now interactions between j -waves, $j > i$, and the strong wave N_{\pm}^{\downarrow} , as described in Lemmas 3.3.6 and 3.3.14, we obtain the estimate (3.3.86)

$$[W + KQ] \leq \left(-k_L^> + k_M^> \right) |\beta_{j,n}^L|. \quad (3.4.9)$$

This weak wave also modifies the left-hand state by the amount

$$[\mu_j(u_{\ell})] = -\text{sign}(\beta_{j,n}^L) |\beta_{j,n}^L| + \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_{j,n}^L|), \quad [\mu_k(u_{\ell})] = \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}| \cdot |\beta_{j,n}^L|), \quad k \neq j. \quad (3.4.10)$$

Finally, there are j -waves $\tilde{\beta}_{j,n}^L$ which cross N_{\pm}^{\downarrow} from the right, after having entered Γ and these waves decrease the total variation by

$$[W + KQ] \leq \left(-k_M^< + k_L^< \right) |\tilde{\beta}_{j,n}^L|. \quad (3.4.11)$$

and modify the left-hand state $\mu_k(u_\ell)$ by the amount

$$[\mu_j(u_\ell)] = -\text{sign}(\tilde{\beta}_{j,n}^L)|\tilde{\beta}_{j,n}^L| + \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\tilde{\beta}_{j,n}^L|), \quad [\mu_k(u_\ell)] = \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow| \cdot |\tilde{\beta}_{j,n}^L|), \quad k \neq j. \quad (3.4.12)$$

Weak interactions with C^\uparrow

The interactions between j -waves, and C^\uparrow are simpler to treat than those with N_\pm^\downarrow since i -waves cannot cross C^\uparrow . On the other hand, it is important to understand that the i -waves approaching C^\uparrow from the left must be the remains of the i -waves that previously crossed N_\pm^\downarrow .

For i -waves reaching C^\uparrow from the right, we find

$$[W + KQ] \leq -k_R |\alpha_n^R|, \quad (3.4.13)$$

and that the right-hand states are modified by

$$[\mu_i(u_r)] = -\text{sign}(\alpha_n^R)|\alpha_n^R| + \mathcal{O}(|C^\uparrow| \cdot |\alpha_n^R|), \quad [\mu_j(u_r)] = \mathcal{O}(|C^\uparrow| \cdot |\alpha_n^R|), \quad j \neq i. \quad (3.4.14)$$

When i -waves reach C^\uparrow from the left, similar estimates hold, namely

$$[W + KQ] \leq -k_M |\tilde{\alpha}_n^R|, \quad (3.4.15)$$

and

$$[\mu_k(u_r)] = \mathcal{O}(|C^\uparrow| \cdot |\tilde{\alpha}_n^R|), \quad \forall k. \quad (3.4.16)$$

The interactions involving j -waves and C^\uparrow are simple. If $j < i$, the estimate (3.3.89) provides

$$[W + KQ] \leq (-k_R^< + k_M^<) |\beta_{j,n}^R|. \quad (3.4.17)$$

and changes in the state on the right-hand side are easily seen to be

$$[\mu_j(u_r)] = -\text{sign}(\beta_{j,n}^R)|\beta_{j,n}^R| + \mathcal{O}(|C^\uparrow| \cdot |\beta_{j,n}^R|), \quad [\mu_k(u_r)] = \mathcal{O}(|C^\uparrow| \cdot |\beta_{j,n}^R|), \quad k \neq j. \quad (3.4.18)$$

On the other hand, for $j > i$, the estimate (3.3.88) is

$$[W + KQ] \leq (-k_M^> + k_R^>) |\tilde{\beta}_{j,n}^R|, \quad (3.4.19)$$

and the right-hand states change by

$$[\mu_j(u_r)] = -\text{sign}(\tilde{\beta}_{j,n}^R)|\tilde{\beta}_{j,n}^R| + \mathcal{O}(|C^\uparrow| \cdot |\tilde{\beta}_{j,n}^R|), \quad [\mu_k(u_r)] = \mathcal{O}(|C^\uparrow| \cdot |\tilde{\beta}_{j,n}^R|), \quad k \neq j. \quad (3.4.20)$$

Wave crossings between N_\pm^\downarrow and C^\uparrow

The waves entering the region between the two strong shocks are either — i -waves α_n^L entering from the left;

- j -waves $\beta_{j,n}^L$, $j > i$, entering from the left ;
- j -waves $\beta_{j,n}^R$, $j < i$, entering from the right.

Our goal is to relate the strength of these waves to the strength of the outgoing waves $\tilde{\alpha}_n^R$, $\tilde{\beta}_{j,n}^R$ and $\tilde{\beta}_{j,n}^L$.

If all interactions within Γ were linear, then the i -waves exiting on the right, namely $\tilde{\alpha}_n^R$ would be the result of the interactions among the fraction of the i -waves $C_i \alpha_n^L$ which had crossed N_{\pm}^{\downarrow} from the left. Similarly, since the only j -waves with $j > i$ ($j < i$) that entered the domain were $\beta_{j,n}^L$ ($\beta_{j,n}^R$), then $\tilde{\beta}_{j,n}^R$ ($\tilde{\beta}_{j,n}^L$) would be the result of the interactions among $\beta_{j,n}^L$ ($\beta_{j,n}^R$). In the linear case, this would justify the following three bounds

$$\sum_{n=1}^{\tilde{n}^R} |\tilde{\alpha}_n^R| \leq C_i \sum_{n=1}^{n^L} |\alpha_n^L|, \quad (3.4.21)$$

$$\sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^L} |\tilde{\beta}_{j,n}^L| \leq \sum_{n=1}^{n_j^R} |\beta_{j,n}^R|, \quad \forall j < i, \quad (3.4.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^R} |\tilde{\beta}_{j,n}^R| \leq \sum_{n=1}^{n_j^L} |\beta_{j,n}^L|, \quad \forall j > i. \quad (3.4.23)$$

In the weakly nonlinear regime, these estimates are correct up to second-order corrections weighted by the total strength of all of the secondary waves which might be generated by interactions inside Γ . The correct upper bounds would therefore be the same, except for the presence of weights of the form $(1 + \epsilon(t))$, which we can simply neglect for the purposes of this section.

3.4.2. Total variation estimate for the splitting-merging cycle

We now combine all the bounds computed to produce a negative upper bound on changes in $W + KQ$ during a single splitting-merging cycle. We begin by returning to the quantity η from Lemma 3.4.1 which was found to be strictly negative during a cycle.

Lemme 3.4.2. *The nucleation condition is bounded by the signed variation of the incoming waves according to*

$$\begin{aligned} \eta \leq & \left(C_i^{\sharp} + \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}|) \right) \sum_{n=1}^{n^L} |\alpha_n^L| + \left(1 + \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|) \right) \sum_{n=1}^{n^R} |\alpha_n^R| \\ & + \sum_{j>i} \left(C_j^{\sharp} + \mathcal{O}(|N_{\pm}^{\downarrow}|) \right) \sum_{n=1}^{n_j^L} |\beta_{j,n}^L| + \left(1 + \mathcal{O}(|C^{\uparrow}|) \right) \sum_{j<i} \sum_{n=1}^{n_j^R} |\beta_{j,n}^R|. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

DÉMONSTRATION. We observe immediately that the Lipschitz continuity of the map Φ_i^\sharp implies that there exists constants C_k^\sharp , $k = 1, \dots, n$, such that

$$\left| \mu_i(\Phi_i^\sharp(u_\ell(t_0+))) - \mu_i(\Phi_i^\sharp(u_\ell(t_f-))) \right| < \sum_{k=1}^n C_k^\sharp \left| \mu_k(u_\ell(t_0+)) - \mu_k(u_\ell(t_f-)) \right|.$$

The first term of (3.4.2) is bounded by the sum (3.4.8), (3.4.10) and (3.4.12), while the second term is bounded by the sum of (3.4.14), (3.4.16), (3.4.18) and (3.4.20).

$$\begin{aligned} \eta &< \sum_{k=1}^n C_k^\sharp \left| \mu_k(u_\ell(t_0+)) - \mu_k(u_\ell(t_f-)) \right| + \left(\mu_i(u_r(t_f-)) - \mu_i(u_r(t_0+)) \right) \\ &\leq C_i^\sharp \left| \sum_{n=1}^{n^L} -\text{sign}(\alpha_n^L) |\alpha_n^L| \right| + \sum_{n=1}^{n^L} \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow(t_n^L-)| \cdot |\alpha_n^L|) \\ &\quad + \sum_{j>i} C_j^\sharp \left| \sum_{n=1}^{n_j^L} -\text{sign}(\beta_{j,n}^L) |\beta_{j,n}^L| \right| + \sum_{j>i} \sum_{n=1}^{n_j^L} \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow(t_{j,n}^L-)| \cdot |\beta_{j,n}^L|) \\ &\quad + \sum_{j<i} C_j^\sharp \left| \sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^L} -\text{sign}(\tilde{\beta}_{j,n}^L) |\tilde{\beta}_{j,n}^L| \right| + \sum_{j<i} \sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^L} \mathcal{O}(|N_\pm^\downarrow(\tilde{t}_{j,n}^L-)| \cdot |\tilde{\beta}_{j,n}^L|) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{n^R} -\text{sign}(\alpha_n^R) |\alpha_n^R| + \sum_{n=1}^{n^R} \mathcal{O}(|C^\uparrow(t_n^R-)| \cdot |\alpha_n^R|) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\tilde{n}^R} -\text{sign}(\tilde{\alpha}_n^R) |\tilde{\alpha}_n^R| + \sum_{n=1}^{\tilde{n}^R} \mathcal{O}(|C^\uparrow(\tilde{t}_n^R-)| \cdot |\tilde{\alpha}_n^R|) \\ &\quad + \sum_{j<i} \sum_{n=1}^{n_j^R} -\text{sign}(\beta_{j,n}^R) |\beta_{j,n}^R| + \sum_{j<i} \sum_{n=1}^{n_j^R} \mathcal{O}(|C^\uparrow(t_{j,n}^R-)| \cdot |\beta_{j,n}^R|) \\ &\quad + \sum_{j>i} \sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^R} -\text{sign}(\tilde{\beta}_{j,n}^R) |\tilde{\beta}_{j,n}^R| + \sum_{j>i} \sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^R} \mathcal{O}(|C^\uparrow(\tilde{t}_{j,n}^R-)| \cdot |\tilde{\beta}_{j,n}^R|) \end{aligned}$$

Up to second-order terms, we may assume that the strength of the strong waves is equal to the constant strength of the unperturbed waves in \bar{u}_0 . Our earlier bounds show that the strength of the waves exiting Γ are bounded by the strength of the waves entering it, and therefore, after simplifying the expressions above, we can rewrite the upper bound above as in (3.4.24). \square

We complete this section with a proof of the main theorem. The proof resembles the accounting that was necessary in the proof of the previous lemma, except for the manipulation of the weights k_* now appearing in $W + KQ$.

PROOF OF THEOREM 3.4.1. Variations in $W + KQ$ involving only waves in V_L and V_R always lead to decreases in Glimm's functional, and therefore it suffices to

account for changes involving interactions with at least one wave from among N_{\pm}^{\downarrow} or C^{\uparrow} . We invoke the bounds (3.4.7), (3.4.9), (3.4.11), (3.4.13), (3.4.15), (3.4.17) and (3.4.19).

$$\begin{aligned}
[W + KQ] &\leq \sum_{n=1}^{n^L} \left(-k_L + (1 + C_i)k_M \right) |\alpha_n^L| \\
&\quad + \sum_{j>i} \sum_{n=1}^{n_j^L} \left(-k_L^> + k_M^> \right) |\beta_{j,n}^L| + \sum_{j<i} \sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^L} \left(-k_M^< + k_L^< \right) |\tilde{\beta}_{j,n}^L| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{n^R} -k_R |\alpha_n^R| + \sum_{n=1}^{\tilde{n}^R} -k_M |\tilde{\alpha}_n^R| \\
&\quad + \sum_{j<i} \sum_{n=1}^{n_j^R} \left(-k_R^< + k_M^< \right) |\beta_{j,n}^R| + \sum_{j>i} \sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^R} \left(-k_M^> + k_R^> \right) |\tilde{\beta}_{j,n}^R|
\end{aligned}$$

We observe that up to second-order terms

$$(-k_L + (1 + C_i)k_M) \sum_{n=1}^{n^L} |\alpha_n^L| - k_M \sum_{n=1}^{\tilde{n}^R} |\tilde{\alpha}_n^R| \leq (-k_L + k_M) \sum_{n=1}^{n^L} |\alpha_n^L|.$$

Similarly, since the weights are negative, the bounds (3.4.21)-(3.4.23) imply that

$$\begin{aligned}
\sum_{j<i} \sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^L} (-k_M^< + k_L^<) |\tilde{\beta}_{j,n}^L| &\leq \sum_{j<i} \sum_{n=1}^{n_j^L} (-k_M^< + k_L^<) |\beta_{j,n}^L|, \\
\sum_{j>i} \sum_{n=1}^{\tilde{n}_j^R} (-k_M^> + k_R^>) |\tilde{\beta}_{j,n}^R| &\leq \sum_{j>i} \sum_{n=1}^{n_j^R} (-k_M^> + k_R^>) |\beta_{j,n}^R|.
\end{aligned}$$

These bounds allow us to further simplify the estimates to

$$\begin{aligned}
[W + KQ] &\leq \left(-k_L + k_M \right) \sum_{n=1}^{n^L} |\alpha_n^L| - k_R \sum_{n=1}^{n^R} |\alpha_n^R| \\
&\quad + \left(-k_L^> + k_R^> \right) \sum_{j>i} \sum_{n=1}^{n_j^L} |\beta_{j,n}^L| + \left(-k_R^< + k_L^< \right) \sum_{j<i} \sum_{n=1}^{n_j^R} |\beta_{j,n}^R|.
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

For the choices of weights k_* proposed in Lemma 3.3.16, we find that $k_R = 1$ and

$$\begin{aligned}
-k_L + k_M &= -(1 + C_i + \zeta) + 1 = -C_i - \zeta, \\
-k_L^> + k_R^> &= -(1 + \zeta) + (1 - \zeta) = -2\zeta, \\
-k_R^< + k_L^< &= -(1 + \zeta) + (1 - \zeta) = -2\zeta.
\end{aligned}$$

In order to bound above the negative quantity (3.4.25) by a multiple of $-\eta$, it suffices to observe that the weights on (3.4.24) are all bounded uniformly, and

hence for every fixed positive value of ζ , there exists a positive constant c such that

$$[W + KQ] \leq -c\eta.$$

Splitting and mergings cannot proceed indefinitely since each cycle leads $W + KQ$ to decrease by a constant amount. The constant $c\eta$ being uniform as the front-tracking scheme converges to a weak solution, the result also holds for that weak solution. \square

3.5. CONCLUSION

The long-term objective is to establish an existence result for initial data of small total variation with non-classical shocks. As a step towards this objective, this research has treated in detail small perturbations to a single strong isolated non-classical shocks using LeFloch's theory of kinetic functions to constrain the family of admissible shocks. The main novelties are the new measure of shock strength, extending a previous study of scalar problems [42], and a new weighted interaction potential inspired by earlier works [55, 38]. This work explicitly identifies the relationship between the strength of the non-classical shocks and of the perturbation, even as the strength of the non-classical wave vanishes. Finally, it is shown that a nucleation condition provides additional stability to the splitting-merging process. The techniques described here appear to be applicable to the analysis of solutions to problems with general initial data.

Chapitre 4

CONCLUSIONS

Les travaux effectués fournissent une contribution à la théorie de l'existence de solutions aux systèmes hyperboliques de lois de conservation, plus particulièrement aux systèmes non convexes pour lesquels l'entropie n'est pas un critère de sélection suffisamment restrictif. Bien que notre attention se soit concentrée sur les solutions de type "splitting-merging" pour les systèmes hyperboliques non linéaires dans une variable spatiale, cette thèse offre un progrès dans la compréhension des solutions entropiques non classiques car cette classe contient la majorité des difficultés qui seraient présentes dans le problème à valeur initiale général.

La théorie d'existence dans de nombreux modèles dans les sciences physiques, comme dans les fluides multi-phases, la magnétohydrodynamique, les milieux poreux, nécessitent des développements le long de deux axes, d'abord pour les systèmes de lois de conservation en plusieurs dimensions, et ensuite d'étendre la théorie aux systèmes hyperboliques non linéaire et non conservatifs, après l'apparition de discontinuités.

L'approche poursuivie, développée par Philippe G. LeFloch, est de chercher un critère ponctuel pour l'identification des discontinuités admissibles, comme une régularisation d'ordre supérieur. Notre contribution repousse les limites de cette approche pour les lois de conservation scalaire et non convexe avec un nombre arbitraire de points d'inflexions. Nous avons fourni une caractérisation par une fonction cinétique de tous les chocs admissibles. De plus, nous énonçons les conditions dans lesquelles une discontinuité est entropie dissipative. Par manque de temps, nous n'avons pas réussi à caractériser les solutions au problème de Riemann associé au cas scalaire. Ceci reste donc un problème ouvert. Les travaux sont une extension des travaux de Bedjaoui, Chalons, Coquel et LeFloch concernant les gaz isentropiques avec une loi d'état de Van der Waals (avec deux points

d'inflexion). Ces travaux et les nôtres montrent, contrairement au cas avec un seul point d'inflexion, la perte d'unicité des solutions non classiques.

La grande partie de notre recherche offre une contribution significative en établissant un résultat d'existence pour une classe importante de solutions d'entropie non classiques au problème à valeur initiale pour les systèmes 1-d, celle des solutions de "splitting/merging". Ceci est une étape intermédiaire avant le traitement des conditions initiales générales, car le tout correspondrait à l'interaction entre plusieurs solutions de type "splitting/merging". Nous avons construit un nouveau solveur de Riemann non classique basé sur une fonction cinétique pour la propagation de chocs non classiques et sur un critère de nucléation qui choisit entre le régime classique et non classique. La preuve d'existence de la stabilité non linéaire s'appuie sur une nouvelle définition de la fonctionnelle de Glimm qui mesure de façon plus naturelle la variation totale et l'interaction des ondes classiques et non classiques. La condition de nucléation, qui a des bases physiques, contribue à la stabilité des solutions, comme le démontre une extension d'un résultat de LeFloch et Shearer : la condition de nucléation implique que seul un nombre fini de cycles de "splitting/merging" sont possibles.

Il ne reste que pour la grande classe des systèmes hyperboliques non linéaires des lois de conservation, nous avons traité juste le cas de "splitting/merging" incluant une famille d'onde non classique. Il serait intéressant d'étudier le cas des systèmes ayant plus qu'une famille d'onde non classique et se concentrer sur une petite perturbation des ondes non classiques, ou même considérer un système ayant plus que deux ondes non classiques dans deux familles différentes d'ondes, comme les équations de la magnétohydrodynamique. Nous avons traité les cas d'interaction d'une grande onde non classique avec d'autres ondes de plus faible intensité, mais est-il nécessaire de traiter que les cas des grandes ondes non classiques par rapport aux autres ondes plus faibles ? Pour l'instant, nos techniques semblent montrer que non. La théorie des fonctions cinétiques possède déjà des résultats généraux de stabilité et d'unicité, mais l'existence reste encore ouverte. Nos travaux sont une contribution significative à l'existence de solutions pour cette approche et contribuent ainsi à l'étude des régularisations des systèmes hyperboliques.

Bibliographie

- [1] A. Münch A. L. BERTOZZI et M. SHEARER : Undercompressive shocks in thin film flows. *Phys. D.*, 134(4):431–464.
- [2] R. ABEYARATNE et J. KNOWLES : Implications of viscosity and strain-gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids. *SIAM J. Appl. Math.*, 51(5):1205–1221, 1991.
- [3] R. ABEYARATNE et J. KNOWLES : Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 114(2):119–154, 1991.
- [4] N. BEDJAOUI et P.G. LEFLOCH : Diffusive-dispersive traveling waves and kinetic relations. II. An hyperbolic-elliptic model of phase transitions. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 132(3):545–565.
- [5] N. BEDJAOUI et P.G. LEFLOCH : Diffusive-dispersive traveling waves and kinetic relations. III. A hyperbolic model of nonlinear elastodynamics. *Ann. Univ. Ferrara Sc. Mat.*, 47(1):117–144.
- [6] N. BEDJAOUI et P.G. LEFLOCH : Diffusive-dispersive traveling waves and kinetic relations. IV. Compressible Euler system. *Chinese Ann. Appl. Math.*, 24(1):17–34.
- [7] N. BEDJAOUI et P.G. LEFLOCH : Diffusive–dispersive traveling waves and kinetic relations : I : Nonconvex hyperbolic conservation laws. *J. Diff. Equ.*, 178(2):574–607, 2002.
- [8] N. BEDJAOUI et P.G. LEFLOCH : Diffusive-dispersive travelling waves and kinetic relations V. Singular diffusion and nonlinear dispersion. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 134A(5):815–844, 2004.
- [9] A. L. BERTOZZI et M. SHEARER : Existence of undercompressive traveling waves in thin film equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 32(1):194–213.
- [10] S. BIANCHINI : On the Riemann problem for non-conservative hyperbolic systems. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 166(1):1–26.
- [11] A. BRESSAN : Global solutions of systems of conservation laws by wave-front tracking. *J. Math. Anal. Appl.*, 170(2):414–432, 1992.
- [12] A. BRESSAN : The unique limit of the Glimm scheme. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 130(4):205–230, 1995.

- [13] A. BRESSAN : Hyperbolic systems of conservation laws. *Rev. Mat. Complut.*, 12(1): 135–200, 1999.
- [14] A. BRESSAN : *Hyperbolic systems of conservation laws : The one-dimensional Cauchy problem*, volume 20 de *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [15] A. BRESSAN et S. BIANCHINI : BV solutions for a class of viscous hyperbolic systems. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(4):1673–1713, 2000.
- [16] A. BRESSAN et S. BIANCHINI : On a Lyapunov functional relating shortening curves and viscous conservation laws. *Nonlinear Analysis*, 51(4):649–662, 2002.
- [17] A. BRESSAN et S. BIANCHINI : Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Ann. of Math.*, 161(2):223–342, 2005.
- [18] A. BRESSAN et R. M. COLOMBO : The semigroup generated by 2×2 conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 133(1):1–75, 1995.
- [19] A. BRESSAN, T. P. LIU et T. YANG : L^1 Stability estimates for $n \times n$ conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 149(1):1–22, 1999.
- [20] M. BRIO et J.K. HUNTER : Rotationally invariant hyperbolic waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(8):1037–1053, 1990.
- [21] R. COURANT et K.O. FRIEDRICHS : *Supersonic Flow and Shock Waves*, volume 21 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [22] M. CRANDALL : The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables. *Israel J. Math.*, 12(2):108–132, 1972.
- [23] P.G. LeFloch D. AMADORI, P. Baiti et B. PICCOLI : Nonclassical shocks and the Cauchy problem for nonconvex conservation laws. *J. Diff. Equ.*, 151(2):345–372, 1999.
- [24] C. M. DAFERMOS : Polygonal Approximation of Solution to the Initial Value Problem for a Conservation Law. *J. Math. Anal. Appl.*, 38(1):33–41, 1972.
- [25] C. M. DAFERMOS : The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws. *J. Diff. Equ.*, 14(2):202–212, 1973.
- [26] C.M. DAFERMOS : *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, volume 325 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [27] R. J. DiPERNA : Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Diff. Equ.*, 20(1):187–212, 1976.
- [28] R. J. DiPERNA : Convergence of approximate solutions to conservation laws. *Arch. Rat Mech. Anal.*, 82(1):27–70, 1983.
- [29] L. EULER : *Opera Omnia*, volume XII-XIII de *II. C.A. Truesdell*. Lausanne : Orell Fussli Turici, 1954-1955.

- [30] J. GLIMM : Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18(4):697–715, 1965.
- [31] E. GODLEWSKI et P. RAVIART : *Hyperbolic systems of conservation laws*. Mathématiques et Applications. Publication de la SMAI, Ellipses, 1991.
- [32] J. GOODMAN et Z.P. XIN : Viscous limits for piecewise smooth solutions to systems of conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 121(3):235–265, 1992.
- [33] M. HADAMARD : Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles. *J. Phys. Theor. Appl.*, 6(1):202–241, 1907.
- [34] B. T. HAYES et P. G. LEFLOCH : Non-Classical Shocks and Kinetic Relations : Strictly Hyperbolic Systems. Rapport technique 357, École Polytechnique, Palaiseau, 1996.
- [35] B. T. HAYES et P. G. LEFLOCH : Non-Classical Shocks and Kinetic Relations : Scalar Conservation Laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 139(1):1–56, 1997.
- [36] B. T. HAYES et P. G. LEFLOCH : Non-Classical Shocks and Kinetic Relations : Strictly Hyperbolic Systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 31(5):941–991, 2000.
- [37] E. HOPF : The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xxx}$. *Comm. Pure Appl. Math.*, 3(3):201–230, 1950.
- [38] T. IGUCHI et P. G. LEFLOCH : Existence theory for hyperbolic conservation laws with arbitrary flux-function. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 168(3):165–244, 2003.
- [39] D. JACOBS, W. R. MCKINNEY et M. SHEARER : Traveling wave solutions of the modified Korteweg-de Vries-Burgers equation. *J. Diff. Equ.*, 116(2):448–467, 1995.
- [40] H.K. JENSSEN : Blowup for systems of conservation laws. *SIAM J. Math. Anal.*, 31(4):894–908, 2000.
- [41] S.N. KRUSHKOV : First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb.*, 81(2):228–255, 1970.
- [42] M. LAFOREST et P. G. LEFLOCH : Diminishing functionals for nonclassical entropy solutions selected by kinetic relations. *Portugaliae Mathematica*, 67(3):279–319, 2011.
- [43] P. D. LAX : Hyperbolic partial differential equations. *American Mathematical Society*, 2006.
- [44] P. G. LEFLOCH : Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form. Rapport technique, Institute for Mathematics and its Applications, Minneapolis, 1989.
- [45] P. G. LEFLOCH : Propagating phase boundaries : formulation of the problem and existence via the Glimm method. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 123(2):153–197, 1993.
- [46] P. G. LEFLOCH : *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Lectures in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 2002.

- [47] P. G. LEFLOCH : Kinetic relations for undercompressive shock waves. Physical, mathematical, and numerical issues. Rapport technique, Centre for Advanced Study of the Norwegian Academy of Science and Letters, 2009.
- [48] P. G. LEFLOCH et M. SHEARER : Nonclassical Riemann solvers with nucleation. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 134(5):941–964, 2004.
- [49] P. G. LEFLOCH et M. D. THANH : Nonclassical Riemann solvers and kinetic relations. III. A nonconvex hyperbolic model for van der Waals fluids. *Electron. J. Diff. Equ.*, 2000(72):1–19, 2000.
- [50] P. G. LEFLOCH et M. D. THANH : Non-classical Riemann solvers and kinetic relations. I. A nonconvex hyperbolic model of phase transitions. *Z. Angew. Math. Phys.*, 52(4):597–619, 2001.
- [51] P. G. LEFLOCH et M. D. THANH : Non-classical Riemann solvers and kinetic relations. II. An hyperbolic-elliptic model of phase-transition dynamics. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A*, 132(1):181–219, 2002.
- [52] P. G. LEFLOCH et M. D. THANH : Properties of Rankine-Hugoniot curves for van der Waals fluids. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 20(2):211–238, 2003.
- [53] M. J. LIDTHILL et G. B. WHITHAM : On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc. Roy. Soc. A.*, 229(1178):317–345, 1955.
- [54] T.P. LIU : The Riemann problem for general systems of conservation laws. *J. Diff. Equ.*, 18(1):218–234, 1975.
- [55] T.P. LIU : Admissible solutions of hyperbolic conservation laws. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 30, 1981.
- [56] T.P. LIU et T. YANG : Well-posedness theory for hyperbolic conservation laws. *Pure Appl. Math.*, 52(12):1553–1586, 1999.
- [57] J. W. MILNOR : Topology from the differentiable viewpoint. princeton landmarks in mathematics. *Princeton University Press*, 1997.
- [58] C. B. MOLER : *Numerical computing with MATLAB*. Textbook in Applied Mathematics. SIAM, 2004.
- [59] F. Coquel N. BEDJAOUI, C. Chalons et P.G. LEFLOCH : Non-monotonic traveling waves in van der Waals fluids. *Anal. Appl.*, 3(4):419–446.
- [60] O. OLEINIK : Discontinuous solutions of non-linear differential equations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 12:3–73, 1957.
- [61] O. OLEINIK : Construction of a generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation of first order by the introduction of vanishing viscosity. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 14:159–164, 1959.
- [62] O. OLEINIK : Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Transl. Amer. Math. Soc.*, 26:85–172, 1963.

- [63] P.G. LeFloch P. BAITI et B. PICCOLI : Nonclassical shocks and the Cauchy problem. General conservation laws. *J. Diff. Equ.*, 151(2):345–372, 1999.
- [64] P.G. LeFloch P. BAITI et B. PICCOLI : Uniqueness of classical and nonclassical solutions for nonlinear hyperbolic systems. *J. Diff. Equ.*, 172(1):59–82, 2001.
- [65] P.G. LeFloch P. BAITI et B. PICCOLI : Existence theory for nonclassical entropy solutions of scalar conservation laws. *Z. Angew. Math. Phys.*, 55(6):927–945, 2004.
- [66] J. RAUCH : *Partial Differential Equations*, volume 128 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [67] B. RIEMANN : Uber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungssweite. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 8(19):43–65, 1860.
- [68] N. H. RISEBRO : A Front-Tracking Alternative to the Random Choice Method. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117(4):1125–1139, 1993.
- [69] S. SCHULZE et M. SHEARER : Undercompressive shocks for a system of hyperbolic conservation laws with cubic nonlinearity. *J. Math. Anal. Appl.*, 229(1):344–362, 1999.
- [70] L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg. Hermann, Paris, 1966.
- [71] M. SHEARER : The Riemann problem for the planar motion of an elastic string. *J. Diff. Equ.*, 61(2):149–163, 1983.
- [72] M. SLEMROD : Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 81(4):301–315, 1983.
- [73] M. SLEMROD : The viscosity-capillarity approach to phase transitions. In D. Serre M. RASCLE et M. SLEMROD, éditeurs : *PDEs and Continuum Models of Phase Transitions*, volume 344 de *Lecture Notes in Phys.*, pages 201–206. Springer-Verlag, 1988.
- [74] J. SMOLLER : *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, volume 258 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [75] M. D. THANH : Global existence of traveling waves for general flux functions. *Nonlinear Analysis*, 72(1):231–239, 2010.
- [76] L. TRUSKINOVSKY : Dynamics of non-equilibrium phase boundaries in a heat conducting non-linearly elastic medium. *Prikl. Mat. Mekh.*, 51(6):1009–1019, 1987.
- [77] L. TRUSKINOVSKY : Kinks versus shocks. In *Shock induced transitions and phase structures in general media*, volume 52 de *Vol. Math. Appl.*, pages 185–229. Institute for Mathematics and its Applications, 1993.
- [78] S. H. YU : Zero-dissipation limit of solutions with shocks for systems of hyperbolic conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 146(4):275–370, 1999.